数理解析研究所講究録
第104巻 1970年 23-31

不変部分空間について

東北大 教養　吉 野　崇

有界作用素の不変部分空間について、その存在についての問題とその構造についての問題とがありますが、例えば、正規作用素の場合は、スペクトル分解定理によって、充分沢山の不変部分空間（この場合は、特に、reducing subspaces）の存在が知られているわけで、このことは、今日では、古典的で、基礎的な事であります。

自明でない不変部分空間の存在を示す結果として、次の事が知られています。

定　理　1．（N. Aronszajn and K. T. Smith [1]）

バナハ空間上のコンパクト作用素は、自明でない不変部分空間をもつ。

定　理　2．（A. R. Bernstein and A. Robinson [3]），[11]．

ヒルベルト空間上の作用素で、その作用素の多項式がコンパクト作用素ならば、自明でない不変部分空間をもつ。

2i

定理 3. (W. B. Arveson and J. Feldman [2]).

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の作用素Tが、$\liminf \|T^n e\|^{1/n} = 0$ for some $e \in \mathcal{H}$ で、且つ、Tと単位作用素とによって生成されるノルムで閉じた代数が、零作用素でないコンパクト作用素を含むならば、作用素Tは、自明でない不変部分空間をもつ。

これ等の結果は、何れの場合も、何らかの意味で、コンパクト作用素との関連に於て、その自明でない不変部分空間の存在を示しているわけですが、その構造という観点からは、何れの場合も明らかではありません。

不変部分空間の構造を主とした結果としては、次の A. Beurling [4], Halmos [10] 等の shift operators の場合及び、W. F. Donoghue [8] 等の Volterra integral operators の場合等について知られております。

定理 4. V; simple (i.e., $\dim\{x \in \mathcal{H} : V^* x = 0\} = 1$) unilateral shift operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$.
⇨ ∃ an isometric transformation π of $\mathcal{H}$ onto $H^2(dz)$; V is unitarily equivalent to the multiplication operator by z, on $H^2(dz)$. $\mathfrak{M}$ is a simply invariant subspace of $H^2(dz)$ if and only if there exists an inner function q (i.e., $q \in H^\infty(dz)$, $|q| = 1$ a.e.) such that $\mathfrak{M} = q H^2(dz)$.

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界作用素Tの自明でない不変部分空間の存在を調べるときは、次の(1), (2)の条件を仮定してよいことがわかります。

(1) $\mathcal{H} = \vee\{T^n x : n = 0, 1, 2, \cdots\}$, $x \in \mathcal{H}$.

(2) $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{R}(T)$; Tの生成するvon Neuman代数, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; $\mathcal{H}$上の有界作用素の全体.

条件(1)を満すベクトルxをcyclic vectorと云う[5].

条件(1)の下では、P. R. Halmos [9]によって導入されたsub-normal operators (i.e., normal extensionをもつ作用素)は、shift operatorsの場合と類似の表現が可能であります。

定理 5. [5], [14]. *A ; a subnormal operator (with the minimal normal extension B) on a Hilbert space $\mathcal{H}$ with a cyclic vector x.*

⇨ ∃ an isometric transformation π of $\mathcal{H}$ onto $H^2(d\mu ; \sigma(B))$; A is unitarily equivalent to the multiplication operator by λ, on $H^2(d\mu : \sigma(B))$ and $\pi\{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; SA = AS\} = H^\infty(d\mu : \sigma(B))$, where $H^2(d\mu ; \sigma(B))$ denotes the L^2-closure of the set of all complex polynomials in λ, defined on the spectrum $\sigma(B)$ of B, with respect to the Lebesgue-Stieltjes measure $d\mu = d\|E(\lambda)x\|^2$.

明らかに、the closure of $g H^2(d\mu : \sigma(B))$, $g \in H^\infty(d\mu : \sigma(B))$ は,

入で invariant ですが、$d\mu$ は、shift operators の場合と異り、一般には、orthogonal measure ではありませんので、定理4と類似の結果が成り立つか否かは不明であります。又、subnormal operators の自明でない不変部分空間の存在についても、今のところ解けておりません。

"任意の有界作用素は、自明でない不変部分空間をもつ" という L. de Branges and J. Rovnyak の結果 [6] は、その証明に gap があってか、出版されなかったようですが、[7], [12] 等によって、次の事柄がわかります。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素 T, $\|T\| \leqq 1$ に対して、$\mathcal{L}$ = the closure of $(I-T^*T)^{1/2}\mathcal{H}$, $\mathcal{L}(z) = \{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n : f_n \in \mathcal{L},$ $\|f(z)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2 < +\infty \}$ とする。

定理 6. $T^n \to 0$ (strongly) $\Rightarrow$ $\exists$ an isometric transformation π of $\mathcal{H}$ into $\mathcal{L}(z)$; $\pi T = R(0)\pi$ and $\pi(\mathcal{H})$ is invariant under $R(0)$, where $R(0)$ is the operator on $\mathcal{L}(z)$ such that $R(0)f(z) = [f(z) - f(0)]/z$, $f(z) \in \mathcal{L}(z)$.

証明. $\forall f \in \mathcal{H}$ に対して、$\pi f = f(z)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $f_n = (I-T^*T)^{1/2} T^n f$ によって、π を定義すると、

$$\|f_n\|^2 = \|(I-T^*T)^{1/2} T^n f\|^2 = \langle (I-T^*T)T^n f, T^n f \rangle = \|T^n f\|^2 - \|T^{n+1} f\|^2.$$

従って、$\sum_{k=0}^{n} \|f_k\|^2 = \|f\|^2 - \|T^{n+1} f\|^2$. $\therefore$ $\|\pi f\|^2 = \|f(z)\|^2$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|^2 = \| f \|^2 - \lim_n \| T^{n+1} f \|^2 = \| f \|^2 \quad (\because T^n \to 0 (s))$.

故に、π は an isometric transformation of $\mathcal{H}$ into $\mathcal{L}(z)$ である。次に、$\pi(Tf) = (Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (Tf)_n z^n$,

$(Tf)_n = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} T^n (Tf)$ だから、$\pi(Tf) = [\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - f_0]/z$

$= [f(z) - f(0)]/z = R(0) f(z) = R(0) \pi f$. 故に、$\pi T = R(0)\pi$

and $R(0)\pi(\mathcal{H}) \subset \pi(\mathcal{H})$。

定理 7. (J. Rovnyak [12]). a subspace $\mathfrak{M}$ of $\mathcal{L}(z)$ is invariant under z if and only if there exists a partial isometry $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$, on $\mathcal{L}(z)$ such that $\mathfrak{M} = A(z)\mathcal{L}(z)$.

$R(0) = [z \mid \mathcal{L}(z)]^*$ だから、定理 6 によって、$\mathcal{L}(z) \ominus \pi(\mathcal{H})$ is invariant under z である。従って、定理 7 によって、$\mathcal{L}(z) \ominus \pi(\mathcal{H}) = A(z)\mathcal{L}(z)$ for some partial isometry $A(z)$ $= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ なることがわかります。

次に、$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$, $\| A(z) \| \leq 1$ であるような $\mathcal{L}(z)$ 上の作用素 $A(z)$ を用いて、A-norm: $f(z) \in \mathcal{L}(z)$ に対して、

$\| f(z) \|_A^2 = \sup_{h(z) \in \mathcal{L}(z)} [\| f(z) + A(z) h(z) \|^2 - \| h(z) \|^2]$ を定義し、

$K(A) = \{ f(z) \in \mathcal{L}(z) \,;\, \| f(z) \|_A < +\infty \}$ とすると、

定理 8. (L. de Branges and J. Rovnyak [7]).

K(A) は、A-norm でヒルベルト空間である。

$K(A) = \overset{A\text{-norm}}{\bigvee} \{ [I - A(z)A(w)^*] x / (1 - z\bar{w}) \,;\, x \in \mathcal{L},\ |w| < 1 \}$.

$K(A)$ is invariant under $R(0)$、特に、$A(z)$ が a partial isometry ならば、$K(A) \subset \mathcal{L}(z)$, isometrically であり、$K(A) = \mathcal{L}(z) \ominus A(z)\mathcal{L}(z)$ である。

従って、前述の事と定理8とから、$\pi(\mathcal{H}) = K(A)$ なることがわかる。従って、作用素Tの自明でない不変部分空間の存在と、作用素 $R(0)|K(A)$ の自明でない不変部分空間の存在とは、同値である。

定理 9. $A(z) = B(z)C(z) \Rightarrow K(B) \subset K(A)$.

証明. $\forall f(z) \in K(B)$ に対して、$\|f(z)\|_A^2 = \sup_{h(z)\in\mathcal{L}(z)} [\|f(z) + A(z)h(z)\|^2 - \|h(z)\|^2] \leq \sup_{h(z)\in\mathcal{L}(z)} [\|f(z) + B(z)C(z)h(z)\|^2 - \|C(z)h(z)\|^2]$, $(\because \|C(z)\| \leq 1)$, $\leq \|f(z)\|_B^2 \quad \therefore f(z) \in K(A)$.

定理 10. [7] $K(B) \subset K(A)$, isometrically and $A(z)$ is an isometry on $\mathcal{L}(z) \Rightarrow A(z) = B(z)C(z)U$ and $B(z)K(C) = K(A) \ominus K(B)$.

作用素Tを、あらかじめ $\|T\| < 1$ なるようにしておけば、対応する $A(z)$ として、特に、an isometry にとりなおせることがわかるから、$A(z) = B(z)C(z)U$ なる分解が出来ることが、作用素Tの自明でない不変部分空間の存在するための必要条件になる。

$K(A)$ が、有限次元の場合は、次の事が知られている。

定理 11. [7]. $\dim K(A) < +\infty \Rightarrow K(A) \subset \mathcal{L}(z)$, isometrically and $A(z)$ is a finite Blaschke product.

このように、ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界作用素Tを$\mathcal{K}(z)$空間へ表現すると、表現空間$K(A)$の各要素が、具体的に、計算出来るという利点があります。

一方、仮定(2)に注意しますと、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$を生成する single operator としては、simple unilateral shift operator が、そうですし、又、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$を生成するようなコンパクト作用素を作ることが出来る（weighted shift operator として）ことが知られています。$\mathcal{H}$が有限次元の場合は、shift type の作用素で、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$を生成出来ることも知られております。従って、"$\mathcal{B}(\mathcal{H})$を生成する single operators は、weighted shift type の作用素に限られるか？" という問題に到達します。weighted shift type の作用素については、その自明でない不変部分空間の存在がわかっているわけですから、この方向から、不変部分空間の問題を考えることも、興味深いことであります。ちなみに、a cyclic vector をもつような subnormal operator T については、$\mathcal{R}(T)' = \text{abelian}$ なることがわかりますが [14]，$\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (i.e., $\mathcal{R}(T)' =$ scalar.) の場合、Tが、weighted shift type の作用素であるか否かは、不明です。特に、subnormal operator の特別な class である nearly normal operator T (i.e. T, commutes with T^*T) については，$\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ならば，Φ は，shift operator の scalar 倍であることが，[13] で示した nearly operators の構造からわかります。（ただし，$\mathcal{H}$ が，有限次元の場合は，subnormal operators は，すべて，正規作用素になってしまう。）

文献

[1] N. Aronszajn and K. T. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators. Ann. of Math. 60-2 (1954) 345-350.

[2] W. B. Arveson and J. Feldman, A note on invariant subspaces. Michigan Math. J. 15-1 (1968) 61-64.

[3] A. R. Bernstein and A. Robinson, Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos. Pacific J. Math. 16 (1966) 421-431.

[4]. A. Beurling, On two problem concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math. 81 (1949) 239-255.

[5] J. Bram, Subnormal operators, Duke Math. J. 22 (1955) 75-94.

[6] L. de Branges and J. Rovnyak, The existence of invariant subspaces. Bull. Amer. Math. Soc. 70-2(1964) 718-721.

[7] ________, Square Summable Power Series. Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[8] W. F. Donoghue, The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation. Pacific J. Math. 7(1957) 1031-1035.

[9] P. R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators. Summa. Brasiliensis Math. 2(1950) 125-134.

[10] ________, Shifts on Hilbert spaces. J. Reine Angew. Math. 208(1961) 102-112.

[11] ________, Invariant subspaces of polynomially compact operators. Pacific J. Math. 16(1966) 433-437.

[12] J. Rovnyak, Ideals of square summable power series. II. Proc. Amer. Math. Soc. 16-2(1965) 209-212.

[13] T. Yoshino, Nearly normal operators. Tōhoku Math. J. 20(1968) 1-4.

[14] ________, Subnormal operator with a cyclic vector. Tōhoku Math. J. 21(1969) 47-55.