数理解析研究所講究録
第105巻 1971年 29-39

差分微分方程式の解の漸近的性質

山梨大学 工学部　栗原光信

§1. 序

定数係数の単独線型差分微分方程式

(1.1)　$u'(t) + a_0 u(t) + b_0 u(t-\omega) = 0$

に対して、指数多項式

(1.2)　$h(s) = s + a_0 + b_0 e^{-\omega s}$

を固有函数とよび、固有函数 $h(s)$ の零点を固有値とよぶ。ここで、ω は正の定数とする。

この方程式(1.1)の係数に、ある意味で小さい函数 $a(t)$, $b(t)$ をつけ加えて、線型差分微分方程式

(1.3)　$u'(t) + (a_0 + a(t))u(t) + (b_0 + b(t))u(t-\omega) = 0$

について考察しよう。$a(t)$, $b(t)$ は区間 $t_0 \leqq t < +\infty$ において連続な函数とする。R. Bellman & K. L. Cooke [1] [2] は方程式(1.3)について研究し、任意の固有値 λ に対して、次のような漸近的性質(1.4)をもつ解の存在するための十分条件を与えた。

$$(1.4)\qquad u(t)=c(1+o(1))\times\exp\left[\lambda t-c\int_{t_0}^{t}(a(\tau)+b(\tau)e^{-\omega\lambda})d\tau\right],\quad t\to+\infty$$

その十分条件の一つの場合は、

$$\int^{+\infty}|a(t)|dt<+\infty,\quad \int^{+\infty}|b(t)|dt<+\infty$$

で与えられ、もう一つの場合は

$$(1.5)\qquad a(t)=o(1),\quad b(t)=o(1),\qquad t\to+\infty$$

で与えられている。ところが、後者の場合には、(1.5)の条件の他に多くの附帯条件が同時に仮定されている。さらに固有値λが重複度1の零点であることも仮定している。固有値λが重複度1の零点でないときは、条件(1.5)の代りに

$$a(t)=o(t^{-1}),\quad b(t)=o(t^{-1}),\qquad t\to+\infty$$

を用い、その他に多くの附帯条件を仮定している。

そこで、ここでは、条件(1.5)のみを仮定して、方程式(1.3)がどのような漸近的性質をもつ解を有するかという問に対して一つの結果を述べる。

我々は、連立線型の差分微分方程式

$$(1.6)\qquad u'(t)+(A_0+A(t))u(t)+(B_0+B(t))u(t-\omega)=0$$

について考える。$u(t)$はN次元ベクトルで、そのj成分を

$u_j(t)$と表わす。A_0, B_0 は $N\times N$ 定数行列、$A(t)$, $B(t)$ も $N\times N$ 行列で、後者のすべての成分 $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ は区間 $t_0 \leqq t < +\infty$ で連続な函数とする。このとき、(1.2)に対応する固有函数は

(1.7) $\qquad h(s) = \det H(s), \quad H(s) = sI + A_0 + e^{-\omega s}B_0$

となる。従って、以後、固有値とは上の固有函数(1.7)の零点であるとする。ただし、I は $N\times N$ 単位行列である。

次の主要定理を導くことができる。

定理 任意の固有値 λ をとり、$\mu = \mathrm{Re}\,\lambda$ とおく。実数部分が μ に等しい固有値の最大の重複度を $m+1$ $(m \geqq 0)$ とする。さらに係数 $A(t)$, $B(t)$ のすべての成分 $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ は

(1.8) $\qquad a_{ij}(t) = o(t^{-m}), \quad b_{ij}(t) = o(t^{-m}), \quad t \to +\infty,$

$$(i, j = 1, 2, \cdots\cdots, N)$$

を満しているものとする。このとき、方程式(1.6)は

$$\max_{1\leqq j\leqq N}\{|u_j(t)|\} \leqq \exp[\mu t + o(t)]$$

を満す non-trivial な解 $u(t) = (u_j(t))$ をもつ。

以下で この証明を行うが、そのために、N次元ベクトル $u(t) = (u_j(t))$ と $N\times N$ 行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ について次のノルムを導入する。

$$\| u(t) \| = \max_{1 \leq j \leq N} \{ | u_j(t) | \}$$

$$||| u(t) ||| = \| u(t) \| + \| u(t-\omega) \| e^{\mu\omega}$$

$$\| A(t) \| = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \sum_{j=1}^{N} | a_{ij}(t) | \right\}$$

§2. 積分方程式への帰着

我々の扱うべき方程式(1.6)を

$$(2.1) \qquad u'(t) + A_0 u(t) + B_0 u(t-\omega) = -[A(t)u(t) + B(t)u(t-\omega)]$$

と書きかえる。差分微分方程式に関するよく知られた結果から、方程式(2.1)の連続な解は

$$(2.2) \qquad u(t) = K(t-t_0)u(t_0) - \int_{t_0-\omega}^{t_0} K(t-\tau-\omega) B_0 u(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} K(t-\tau)[A(\tau)u(\tau) + B(\tau)u(\tau-\omega)] d\tau$$

と書き表わされる。ここで、$K(t)$は、四条件

(1) $K(t)=0$, $t<0$

(2) $K(0)=I$ ($N \times N$ 単位行列)

(3) $K(t)$ は $0 \leq t < +\infty$ で連続

(4) $K'(t)+A_0K(t)+B_0K(t-\omega)=0, \quad t>0$

をみたす唯一つの N×N 行列函数として定義されるものである。この函数 $K(t)$ は

$$(2.3) \qquad K(t)=\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t)\exp[\lambda_n t]$$

の形に展開できる。ただし、$\{\lambda_n\}$ は固有値すなわち固有函数(1.7)の零点である。この濃度が可附番個であることも知られているので、固有値全体に適当に番号を附し、すべての固有値にわたって和をとった展開式を示している。$Q_n(t)$ は t の多項式で、次数は対応する固有値 λ_n の重複度より小さい。

そこで、任意の固有値λをとり、$\mu=\mathrm{Re}\,\lambda$ とおく。函数 $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ を展開式(2.3)から取った部分和として、次のように定める。

$$(2.4) \qquad \begin{cases} K_1(t)=-\displaystyle\sum_{\mathrm{Re}\lambda_n=\mu} Q_n(t)\exp[\lambda_n t] \\ K_2(t)=\displaystyle\sum_{\mathrm{Re}\lambda_n>\mu} Q_n(t)\exp[\lambda_n t] \\ K_0(t)=-K(t)-K_1(t)+K_2(t)\text{。} \end{cases}$$

このとき、各々について次の不等式が成立する。

$$(2.5)\quad \begin{cases} \|K_0(t)\| \leqq c_0 e^{\kappa t}, & t \geqq 0 \\ \|K_1(t)\| \leqq q(t) e^{\mu t} & t \geqq 0 \\ \|K_2(t)\| \leqq c_2 e^{\nu t} & t \leqq 0\,. \end{cases}$$

ただし、$c_0 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, $\kappa < \mu < \nu$ はすべて定数で、$q(t)$ は次数が m 以下の t の多項式でありその係数はすべて非負である。

一方、次の三つの函数は定係数の方程式

$$u'(t) + A_0 u(t) + B_0 u(t-\omega) = 0$$

の解としてとることができる。

$$(2.6)\qquad e^{\lambda t} c \quad (c\text{はある定数ベクトル}),$$

$$(2.7)\qquad -\int_{t_0}^{t_1} K_1(t-\tau)[A(\tau)u(\tau) + B(\tau)u(\tau-\omega)]\,d\tau,\ (t_1 \geqq t_0)$$

$$(2.8)\qquad \int_{t_0}^{+\infty} K_2(t-\tau)[A(\tau)u(\tau) + B(\tau)u(\tau-\omega)]\,d\tau\,.$$

なんとなれば、(2.6)については、λが固有値であることから示され、(2.7)については、$K_1(t)$ を定める有限和の各項がすべて同じ定係数方程式の解となることから示される。(2.8)については、この積分が有限であることをしばらくの

間仮定すれば、(2.7)の場合と同じ理由によって示される。

方程式(2.2)に戻り、まず区間$t_0-\omega \leqq t \leqq t_0$において$u(t) \equiv 0$とおき、さらに(2.2)の右辺に三つの函数(2.6), (2.7), (2.8)を加えると、

$$(2.9) \qquad u(t) = e^{\lambda t}C + \int_{t_0}^{t} K_0(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau$$
$$+\int_{t_1}^{t} K_1(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau$$
$$+\int_{t}^{+\infty} K_2(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau$$

が導かれる。この積分方程式(2.9)のすべての解は$t>t_1$において方程式(2.1)の解である。この解は明らかにnon-trivialである。ただしここでは積分(2.8)が有限であることを仮定している。

§3. 不動点定理の適用

前節において導かれた積分方程式(2.9)の解の存在を示すために、福原氏[3]によって証明された不動点定理を用いる。それは次のように述べられる。

補助定理　　$\mathfrak{F}$を区間Iで連続な函数からなるある一つの函数族とする。写像$T\{u(t)\}=\bar{u}(t)$は$\mathfrak{F}$の函数$u(t)$を

同じ$\mathfrak{F}$に含まれる函数$\bar{u}(t)$に写す連続な写像とする。すなわち、Iのすべての有界閉区間で一様収束する任意の$\mathfrak{F}$の数列$\{u_n(t)\}$に対し、対応する数列$\{\bar{u}_n(t)\}$もIのすべての有界閉区間で一様収束するものとする。さらに、$T\{\mathfrak{F}\}$がIのすべての有界閉区間で一様有界、同程度連続とする。このとき、写像Tに関する不動点、即ち、$T\{u(t)\}=u(t)$をみたす函数$u(t)$が少くとも一つ存在する。

この不動点定理を適用するために、まず、函数

$$(3.1)\qquad \Gamma(t;r,\eta,\delta)=\eta\max\{(t/r)^m,1\}\times\exp\left[\delta^{-1}\left|\int_r^t \tau^m(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|e^{-\mu\omega})d\tau\right|\right]$$

を導入する。ただし、$\eta>0$, $\delta>0$とする。次に、函数族$\mathfrak{F}$として、

$$(3.2)\qquad \mathfrak{F}=\left\{u(t);\begin{array}{l} t\geqq t_0-\omega \text{ で連続} \\ |||u(t)|||\leqq e^{\mu t}\Gamma(t;t_1,\eta,\delta)\end{array}\right\}$$

をとり、写像$T\{u(t)\}=\bar{u}(t)$として次のように定義する。

$$(3.3)\qquad \bar{u}(t)=\left\{\begin{array}{l} e^{\lambda t}c+\displaystyle\int_{t_0}^t K_0(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau \\ \qquad +\displaystyle\int_{t_1}^t K_1(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau \end{array}\right.$$

$$
\begin{cases}
\quad + \displaystyle\int_t^{+\infty} K_2(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau \\
\qquad\qquad (t_1 \leqq t < +\infty) \\
e^{\lambda t}C + \displaystyle\int_{t_0}^{t} K_0(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau \\
\quad + \displaystyle\int_{t_1}^{+\infty} K_2(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau \\
\qquad\qquad (t_0 \leqq t < t_1) \\
e^{\lambda t}C + \displaystyle\int_{t_1}^{\infty} K_2(t-\tau)[A(\tau)u(\tau)+B(\tau)u(\tau-\omega)]d\tau \\
\qquad\qquad (t_0-\omega \leqq t < t_0)
\end{cases}
$$

不等式(2.5)及び函数$\Gamma(t;t_1,\eta,\delta)$に関する性質を用いて、$u(t)\in\mathfrak{F}$ に対する $\bar{u}(t)=T\{u(t)\}$ の評価を行うと、

$$
(3.4) \qquad |||\bar{u}(t)||| \leqq \{(2\|C\|/\eta)+c\delta\} \times e^{\mu t}\Gamma(t;t_1,\eta,\delta)
$$

なる不等式が得られる。ただし、c は $\omega,\kappa,\mu,\nu,m,c_0,c_2,q_0,\cdots\cdots,q_m$ にのみ関係する定数である。不等式(3.4)から、写像Tが$\mathfrak{F}$において well defined であることが示されている。ここで、不等式(3.4)を導く際に、正数δに対して次の2つの不等式が成立するように、t_0を選ばなければならない。

$$(1+t^m)\frac{\|A(t)\|+\|B(t)\|e^{-\mu\omega}}{\mu-\kappa}\leqq\delta, \quad t\geqq t_0$$

$$(1+t^m)t\,\frac{\|A(t)\|+\|B(t)\|e^{-\mu\omega}}{(\mu-\kappa)t-m}\leqq\delta, \quad t\geqq t_1\geqq t_0$$

これは、仮定(1.8)から可能である。さらに不等式(3.4)から、

$$(2\|C\|/\eta)+c\hat{\delta}<1$$

をみたすように η, δ を選べば、$T\{\mathfrak{F}\}\subset\mathfrak{F}$ が導かれる。函数族 $\mathfrak{F}$ が区間 $t_0-\omega\leqq t<+\infty$ のすべての有界閉区間で一様有界、同程度連続であることも容易に証明できる。従って、この節の初めに述べた不動点定理により、写像Tに関して不動なる点 $u(t)\in\mathfrak{F}$ の存在が導かれ、§1の主要定理の証明となっている。§1で仮定された積分(2.8)の有限性は、求めた解 $u(t)$ のみたす不等式

$$|||u(t)|||\leqq e^{\mu t}\Gamma(t;t_1,\eta,\delta)$$

から導かれる。

参　考　文　献

[1] Bellman R. & K. L. Cooke ; Asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations, Mem. Amer. Math. Soc.,

No. 35 (1959).
[2] Bellman R. & K. L. Cooke; Differential-Difference Equations, Academic Press, New York (1963)
[3] Hukuhara M. ; Sur les points singuliers des equations differentielles lineaires ; domaine real, Jour. Facul. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 2, Vol. 2 (1934), 13-88.