数理解析研究所講究録
第107巻 1971年 6-21

2点境界値問題の数値解法への Spline関数の応用

九大・理 酒井 宦

§1. 序

スプライン関数についての J. P. Aubin の結果([1])を拡張した Sobolev 空間における補間定理を証明することによって近似空間としてスプライン関数の空間を導入する。Calderón-Zygmund による singular integral operator の考えによって、つぎのような補助定理を得る。

補助定理. $\phi \in W^{m,p}(\Omega)$ であって Ω が有界で、限定円錐条件(ristricted cone property)を満足するとき、$\pi\phi$ がある領域 Ω_1 の中に台をもち $\pi\phi \in W^{m,p}(R^n)$ となるような有界な線型作用素 π が存在する。

これを利用すれば、[1]を参考にしてつぎの定理を証明することができる。

定理 1. $\phi \in W^{m,p}(\Omega) \cap W^{m,r}(\Omega)$ で、Ω が有界かつ限定円錐条件を満たすとき、$0 \leq k \leq m-1$ に対して

$1 \leqq r \leqq p$ ならば

$$\inf_{\omega \in S^m} \|\phi-\omega\|_{k,p} \leqq C h^{m-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}} \|D^m \phi\|_r ,$$

$p \leqq r \leqq +\infty$ ならば

$$\inf_{\omega \in S^m} \|\phi-\omega\|_{k,p} \leqq C h^{m-k} \|D^m \phi\|_r$$

が成り立つ，ここで $S^m \equiv \mathrm{Span}_{\alpha}\left\{Q_{m_1+1}\left(\frac{x_1}{h_1}-\alpha_1\right)\cdots Q_{m_n+1}\left(\frac{x_n}{h_n}-\alpha_n\right)\right\}_{\alpha}$ である。

このような性質にもとづいて S^m を各種の微分方程式の近似空間として考えることができるが，ここでは２点境界値問題を考えるので $n=1$ である。

§2. スプライン関数による２点境界値問題の数値解法

m 次のスプライン関数 $(S^m, C^{m-1})_{m=2,3,4,5}$ の応用については [2] で述べたので，ここでは F.R. Lascalzo [6] が１階の初期値問題に適用して非常に正確な近似解を得たスプライン関数の空間 (S^{2p}, C^p) のうち，とくに $p=1,2,3$ に対しては２点境界値問題への応用が可能であって，しかも非常によい結果を導びくことができる。考える問題はつぎのようなものであるとする。

$$(*)\quad \begin{cases} -y'' + \sigma(x)\, y = f(x), & \sigma(x) \geqq 0 \\ y(0)=\alpha, & y(1)=\beta \end{cases}$$

まず $I_u=[0,1]$ を n 等分すると，それに対するスプライン関

数は $p=2$ のとき，2回連続微分可能であることに着目すると、 $w(x)=a+bx+cx^2+\sum_{i=0}^{n-1} d_i(x-ih)_+^3+\sum_{i=0}^{n-1} e_i(x-ih)_+^4$
の形に書ける．ここで $x_+^m=\begin{cases} x^m & (x>0) \\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$ である。

上のような表現から $w(x)$ は $2n+3$ 個のパラメーターに従属することがわかる。そこで $2n+3$ 個の条件を入れることによって(*)の近似解を構成する。

まず $n+3$ 個の条件については，境界条件より2つ，さらに分点 $x_i=ih\ (i=0,1,\cdots,n)$ で方程式をみたすとする。すなわち

(1) $-w_i''+\sigma_i w_i=f_i$ ， $w_0=\alpha$, $w_n=\beta$.

残りの n 個のうち、まず $(n-1)$ 個の条件を考えるために(*)を $[(i-1)h,\ (i+1)h]$ で積分すると、

$$-y'_{i+1}+y'_{i-1}+\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}\sigma(x)y(x)dx=\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}f(x)dx$$

が成り立つので Simpson の公式を利用して $(n-1)$ 個の条件をつぎのように入れる。

(2) $$-w'_{i+1}+w'_{i-1}+\frac{h}{3}(\sigma_{i+1}w_{i+1}+4\sigma_i w_i+\sigma_{i-1}w_{i-1}) = \frac{h}{3}(f_{i+1}+4f_i+f_{i-1}) .$$

実は(1),(2)の条件だけで $w_i, w_i''\ (i=0,1,\cdots,n)$ を決定でき，あと1つは w_i' を決めるために必要となるので，最初に w_i, w_i'' の決定と，それに対する誤差評価をする。4次のスプライン関数 (S^4, C^2) に属することから $w(x)$ に関して，つぎのような1次結合(consistency relation)が成り立つ。

すなわち

$$(3)\qquad w_{i+1}-w_i=\frac{h}{2}(w'_{i+1}+w'_i)+\frac{h^2}{12}(w''_i-w''_{i+1})$$

これから

$$w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}=\frac{h}{2}(w'_{i+1}-w'_{i-1})+\frac{h^2}{12}(-w''_{i+1}+2w''_i-w''_{i-1})$$

が成り立つので(1), (2)を利用すれば，つぎのような3項関係が成り立つ。

$$(4)\qquad -\left(1-\frac{\sigma_{i+1}}{12}h^2\right)w_{i+1}+\left(2+\frac{5}{6}\sigma_i h^2\right)w_i-\left(1-\frac{\sigma_{i-1}}{12}h^2\right)w_{i-1}$$
$$=\frac{h^2}{12}(f_{i+1}+10f_i+f_{i-1}).$$

これを行列の形に表わすと、 $AW=K$ であって A は単調行列であることから $\|A^{-1}\|_\infty \leqq 1/8$ となる。但し

$$A\equiv\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+\frac{5}{6}\sigma_1 h^2 & -1+\frac{\sigma_2}{12}h^2 & & & 0 \\ -1+\frac{\sigma_1}{12}h^2 & 2+\frac{5}{6}\sigma_2 h^2 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & -1+\frac{\sigma_{n-2}}{12}h^2 & 2+\frac{5}{6}\sigma_{n-1}h^2 \end{bmatrix},\quad W\equiv\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$K\equiv\left(\frac{h^2}{12}(f_0+10f_1+f_2)+\left(1-\frac{\sigma_0}{12}h^2\right)\alpha,\ \frac{h^2}{12}(f_1+10f_2+f_3),\ \cdots,\ \frac{h^2}{12}(f_{n-2}+10f_{n-1}+f_n)+\left(1-\frac{\sigma_n}{12}h^2\right)\beta\right)^T$$

で表わされる。この型の $AW=K$ は［4, P195］の計算法によって直接解くことが可能である。

Taylor 展開とGerschgorin-typeの議論によって，もし $y(x)\in C^6(I_u)$ ならば

(5) $\quad |y_i-w_i|\leqq K_0h^4$.

つぎに(1)により $y_i''-w_i''$ については

(6) $\quad |y_i''-w_i''|\leqq K_2h^4$ が成り立つ。

これで w_i, w_i'' の計算と誤差評価が得られたわけであるが，つぎにあと1つの条件をつけて(2), (3)をみたす w_i' を見つける。その1つの方法は(*)を $[0,h]$ で積分して，台形公式でおきなおしたもの，すなわち

$$-w_1'+w_0'+\frac{h}{2}(\sigma_0w_0+\sigma_1w_1)=\frac{h}{2}(f_0+f_1)$$ なる条件をつけて，$w_0', w_1', \cdots, w_n'$ の順にみつける方法，または $[(n-1)h, nh]$ において同様な考察によって $w_n', w_{n-1}', \cdots, w_0'$ の順にみつけるか，あるいは上のやり方で求めたものの相加平均を w_i' としてもよい。いづれの場合にもTaylor展開によって，つぎの評価式が成り立つ。

すなわち

(7) $\quad |y_i'-w_i'|\leqq K_1h^3$.

区間全体における誤差評価を与えるために，Hermite interpolationの拡張定理を証明する。

定理2. $r(x)\in C^{2m}(I_u)$ で $w(x)\in(S^{2m-1}; C^{m-1})$ がある $p\ (2m-2\leqq p\leqq 2m)$ に対して

$|D^{\ell}(r(x_i)-w(x_i)|\leqq Mh^{p-\ell}$ を満足するならば
$0\leqq k\leqq m-1$ に対して

$|D^k(r(x)-w(x))|\leqq M'h^{p-k}$ が成り立つ。

証明. $r^{(\nu)}(x_k)$, $r^{(\nu)}(x_{k+1})$, $\nu=0,1,\cdots,m-1$ を補間する多項式 $p(x)\in(S^{2m-1},C^{m-1})$ を考えると、[, P408] により $|D^k(r(x)-p(x))|\leqq M_1h^{2m-k}$ が成り立つ。

$I_k=[kh,(k+1)h]$ において $p(x)-w(x)$ は Hermite の interpolation formula によって、下のように表わされる。

$$p(x)-w(x)=\sum h^j\left\{(p^{(j)}(kh)-w^{(j)}(kh))\lambda_j\left(\frac{x-kh}{h}\right)+(-1)^j\right.$$
$$\left.(p^{(j)}((k+1)h)-w^{(j)}((k+1)h))\lambda_j\left(k+1-\frac{x}{h}\right)\right\}$$
、ここで $\lambda_j(t)$ は $2m-1$ 次の基本多項式である。定理の仮定により $|D^k(p(x)-w(x))|\leqq M_2h^{p-k}$ が成り立つので3角不等式により定理の結論が得られる。

(5),(6),(7)に対して定理2を利用すれば

(8) $|D^k(y(x)-w(x))|\leqq M_kh^{4-k}$, $k=0,1,2$.

注意1. w_i' $(i=0,1,\cdots,n)$ を決定するために台形公式のかわりに [p.11] の求積公式を利用すると(7)の結果が $|y_i'-w_i'|\leqq K_1h^4$ となって $k=0,1,2$ に対して $|D^k(y(x)-w(x))|\leqq M_kh^4$ が成り立つ。

注意2. w_{i+1}, w_i, w_{i-1} に関する3項関係式は $O(h^4)$ の差分公式として知られている Numerov の公式である。

$p=3$ のときにも前と同じように考えるわけであるがこの場合が実用的であることを示めすために簡単な数値例をあげると W. G. Bickley [5] が (S^3, C^2) の例として引用した $y''+y+1=0,\ y(0)=y(1)=0$ を考えてみると、彼の方法によると $h=0.5$ として $x=0.5$ における近似値は $0.13636\cdots$ ，上の $p=2$ の方法によると $0.13953\cdots$， $p=3$ のときのこれから述べる方法によると $0.13949\cdots$ なお上の真の値は $0.13949\cdots$ であって、少なくとも小数以下5桁は完全に一致している。

$p=3$ のときは前の $p=2$ のときと同様にしてパラメーターが $3n+4$ 個あるが、まず $3n+3$ 個の条件を入れることによって w_i, w_i'' は決定でき、あと1個を指定することによって w_i', w_i''' を決定できる。まず $2n+4$ 個の条件をつぎのように指定する。

$$(9)\quad \begin{cases} -w_i''+\sigma_i w_i=f_i, & i=0,1,\cdots,n \\ -w_i'''+\sigma_i' w_i+\sigma_i w_i'=f_i', & i=0,1,\cdots,n \\ w_0=\alpha,\quad w_n=\beta \end{cases}$$

つぎに (S^6, C^3) に関する consistency relation に注目する。

$$w_{i+1}-w_i=\frac{h}{2}(w_{i+1}'+w_i')+\frac{h^2}{10}(w_i''-w_{i+1}'')+\frac{h^3}{120}(w_i'''+w_{i+1}''')$$

この式を $i, i-1$ に対して利用することによって

$$w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}=\frac{h}{2}(w_{i+1}'-w_{i-1}')+\frac{h^2}{10}(-w_{i+1}''+2w_i''+$$

$(-w_{i-1}''))+\frac{h^3}{120}(w_{i+1}'''-w_{i-1}''')$

が得られ条件(9)を利用すれば，つぎのような関係式が成り立つ。

(10) $$\left(1+\frac{\sigma_{i+1}}{10}h^2-\frac{\sigma_{i+1}'}{120}h^3\right)w_{i+1}+\left(-2-\frac{2}{10}\sigma_i h^2\right)w_i$$
$$+\left(1+\frac{\sigma_{i-1}}{10}h^2+\frac{\sigma_{i-1}'}{120}h^3\right)w_{i-1}$$
$$=\left(\frac{h}{2}+\frac{\sigma_{i+1}}{120}h^3\right)w_{i+1}-\left(\frac{h}{2}+\frac{\sigma_{i-1}}{120}h^3\right)w_{i-1}$$
$$+\frac{h^2}{10}(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})+\frac{h^3}{120}(f_{i-1}'-f_{i+1}')$$

残りの$(n-1)$個の条件は

$$P(w)\equiv\left(\frac{h}{2}+\frac{\sigma_{i+1}}{120}h^3\right)w_{i+1}'-\left(\frac{h}{2}+\frac{\sigma_{i-1}}{120}h^3\right)w_{i-1}'$$ を $O(h^8)$

で w_{i+1}, w_i, w_{i-1} と関係づけるような条件を考えることにしよう。そのためにまず，つぎのような $O(h^7)$ の求積公式をあげる。

$$\int_{-h}^{h}\varphi(x)dx=\frac{h}{15}(7\varphi(h)+16\varphi(0)+7\varphi(-h))+\frac{h^2}{15}(\varphi'(-h)-\varphi'(h))$$

ここで $y(x)$ を(＊)の真の解であるとして $P(y)$ を変形する。

$$P(y)=\frac{h}{2}(y_{i+1}'-y_{i-1}')+\frac{h^3}{120}(\sigma_{i+1}y_{i+1}'-\sigma_{i-1}y_{i-1}')$$
$$=\frac{h}{2}\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}y''dx+\frac{h^3}{120}\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}(\sigma y')'dx$$
$$=\frac{h}{2}\Big[\frac{h}{15}(7\sigma_{i+1}y_{i+1}+16\sigma_i y_i+7\sigma_{i-1}y_{i-1})+\frac{h^2}{15}(\sigma_{i-1}'y_{i-1}$$
$$+\sigma_{i-1}y_{i-1}'-\sigma_{i+1}'y_{i+1}-\sigma_{i+1}y_{i+1}')-\frac{h}{15}(7f_{i+1}+16f_i+7f_{i-1})$$
$$-\frac{h^2}{15}(f_{i-1}'-f_{i+1}')\Big]+\frac{h^3}{120}\int(\sigma y')'dx+O(h^8)$$

$$=\Big[\frac{h^2}{30}(7\sigma_{i+1}y_{i+1}+16\sigma_i y_i+7\sigma_{i-1}y_{i-1})$$
$$+\frac{h^2}{30}(\sigma'_{i-1}y_{i-1}-\sigma'_{i+1}y_{i+1})-\frac{h^2}{30}(7f_{i+1}+16f_i+7f_{i-1})$$
$$-\frac{h^3}{30}(f'_{i-1}-f'_{i+1})\Big]-\frac{h^3}{30}(\sigma_{i+1}y'_{i+1}-\sigma_{i-1}y'_{i-1})$$
$$+\frac{h^3}{120}\int(\sigma y')'dx=[\ 〃\ ]+\frac{h^3}{40}\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}-(\sigma y')'dx$$
$$=[\ 〃\ ]+\frac{h^3}{40}\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}(\sigma f-\sigma^2 y-\sigma' y')dx$$
$$=[\ 〃\ ]+\frac{h^3}{40}\int(\sigma f-\sigma^2 y)dx-\frac{h^3}{40}\int\sigma' y'dx$$

第1の積分にSimpsonの公式を利用し，第2の積分は部分積分してSimpsonの公式を利用すれば

$$P(y)=\frac{h^2}{30}(7\sigma_{i+1}y_{i+1}+16\sigma_i y_i+7\sigma_{i-1}y_{i-1})$$
$$+\frac{h^2}{30}(\sigma'_{i-1}y_{i-1}-\sigma'_{i+1}y_{i+1})-\frac{h^2}{30}(7f_{i+1}+16f_i+7f_{i-1})$$
$$-\frac{h^3}{30}(f'_{i-1}-f'_{i+1})+\frac{h^4}{120}(\sigma_{i+1}f_{i+1}+4\sigma_i f_i+\sigma_{i-1}f_{i-1})-\frac{h^4}{120}\cdot$$
$$(\sigma_{i+1}^2 y_{i+1}+4\sigma_i^2 y_i+\sigma_{i-1}^2 y_{i-1})-\frac{h^3}{40}(\sigma'_{i+1}y_{i+1}-\sigma'_{i-1}y_{i-1})$$
$$+\frac{h^4}{120}(\sigma''_{i+1}y_{i+1}+4\sigma''_i y_i+\sigma''_{i-1}y_{i-1})+O(h^8).$$

上の計算にもとづいて，つぎのような$(n-1)$個の条件を導入する．すなわち

(11) $$\left(\frac{h}{2}+\frac{\sigma_{i+1}}{120}h^3\right)w'_{i+1}-\left(\frac{h}{2}+\frac{\sigma_{i-1}}{120}h^3\right)w'_{i-1}$$
$$=\frac{h^2}{30}(7f_{i+1}w_{i+1}+16f_i w_i+7f_{i-1}w_{i-1})+\frac{h^3}{30}(\sigma'_{i-1}w_{i-1}-\sigma'_{i+1}\cdot$$
$$w_{i+1})-\frac{h^2}{30}(7f_{i+1}+16f_i+7f_{i-1})-\frac{h^3}{30}(f'_{i-1}-f'_{i+1})+\frac{h^4}{120}\cdot$$

$(\sigma_{i+1} f_{i+1} + 4\sigma_i f_i + \sigma_{i-1} f_{i-1}) - \frac{h^4}{120}(\sigma_{i+1}^2 w_{i+1} + 4\sigma_i^2 w_i +$
$\sigma_{i-1}^2 w_{i-1}) - \frac{h^3}{40}(\sigma_{i+1}' w_{i+1} - \sigma_{i-1}' w_{i-1}) + \frac{h^4}{120}(\sigma_{i+1}'' w_{i+1} + 4\sigma_i''$
$w_i + \sigma_{i-1}'' w_{i-1})$.

故に (10), (11) によりつぎのような3項の関係式を得る。

$$-\left[1 - \frac{2}{15}\sigma_{i+1}h^2 + \frac{\sigma_{i+1}'}{20}h^3 + \frac{h^4}{120}(\sigma_{i+1}^2 - \sigma_{i+1}'')\right] w_{i+1}$$
$$+ \left[2 + \frac{11}{15}\sigma_i h^2 - \frac{h^4}{30}(\sigma_i^2 - \sigma_i'')\right] w_i$$
$$- \left[1 - \frac{2}{15}\sigma_{i-1}h^2 - \frac{\sigma_{i-1}'}{20}h^3 + \frac{h^4}{120}(\sigma_{i-1}^2 - \sigma_{i-1}'')\right] w_{i-1}$$
$$= f_{i+1}\left(\frac{2}{15}h^2 - \frac{\sigma_{i+1}}{120}h^4\right) + f_i\left(\frac{11}{15}h^2 - \frac{\sigma_i}{30}h^4\right)$$
$$+ f_{i-1}\left(\frac{2}{15}h^2 - \frac{\sigma_{i-1}}{120}h^4\right) + \frac{h^3}{40}(f_{i-1}' - f_{i+1}').$$

条件の入れ方が上の w のところに y を入れると $O(h^8)$ を除いては一致するようにしているので $p=2$ のときの M-行列の理論により

(12) $$|y_i - w_i| \leqq K_0 h^6.$$

条件(9)により

(13) $$|y_i'' - w_i''| \leqq K_2 h^6.$$

導関数の近似値 w_i', w_i''' を決定するために、あと1つの条件を入れる必要がある。そのために(*)を $[0, h]$ で積分する。

$$-y_1' + y_0' + \int_0^h \sigma(x) y\, dx = \int_0^h f(x)\, dx$$

ここで $O(h^5)$ の求積公式を利用する。すなわち

$\int_0^h \varphi(x)dx = \frac{h}{2}(\varphi(0)+\varphi(h)) + \frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(h))$ を利用して条件を入れる。

$$-w_1' + w_0' + \frac{h}{2}(\sigma_0 w_0 + \sigma_1 w_1) + \frac{h^2}{12}(\sigma_0' w_0 + \sigma_0 w_0' - \sigma_1' w_1 - \sigma_1 w_1') = \frac{h}{2}(f_0+f_1) + \frac{h^2}{12}(f_0'-f_1')$$

これから w_i' $(i=0,1,\cdots,n)$，さらに(9)を利用して w_i''' $(i=0,1,\cdots,n)$ が計算できる。よって Taylor の定理にしたがえば、

$$(14)\qquad \begin{aligned} |y_i' - w_i'| &\leqq \bar{K}_1 h^5 \\ |y_i''' - w_i'''| &\leqq \bar{K}_3 h^5 . \end{aligned}$$

(12), (13), (14) により (S^4, C^2) の場合と同様にして、Hermite interpolation の拡張定理2により

$$|D^k(y(x)-w(x))| \leqq \bar{M}_k h^{6-k}, \quad k=0,1,2,3$$

なる結果を得ることが出来る。

いままでは $p=2,3$ の時は、ともに y' が方程式にあらわれないような2点境界値問題を考えてきたが、つぎのような一般のものについて $p=2$ のときに考えてみる。問題はつぎのようなものである。

$$(**)\qquad \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) , \\ y(0)=\alpha , \quad y(1)=\beta . \end{cases}$$

上のような問題に対して近似解 $w(x)\in(S^4, C^2)$ を構成することにしよう。前と同じ理由によって

$$(15)\quad w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}=\frac{h}{2}(w'_{i+1}-w'_{i-1})+\frac{h^2}{12}(-w''_{i+1}+2w''_i-w''_{i-1})$$

が得られる。つぎのような$n+3$個の条件を考える。

$$(16)\quad \begin{aligned} &w''_i+p_iw'_i+q_iw_i=f_i,\quad i=0,1,\cdots,n,\\ &w_0=\alpha,\quad w_n=\beta. \end{aligned}$$

(15)と(16)から下の関係式が成り立つ。

$$\left(1-\frac{q_{i+1}}{12}h^2\right)w_{i+1}+\left(-2+\frac{2q_i}{12}h^2\right)w_i+\left(1-\frac{q_{i-1}}{12}h^2\right)w_{i-1}$$
$$=\frac{h}{2}(w'_{i+1}-w'_{i-1})+\frac{h^2}{12}(-f_{i+1}+2f_i-f_{i-1})$$
$$+\frac{h^2}{12}(p_{i+1}w'_{i+1}-2p_iw'_i+p_{i-1}w'_{i-1}).$$

つぎに以下において必要となる求積公式をあげることにする。 $\varphi(x)\in C^3$ ならば、つぎの関係式が成り立つ。

$$\int_{ih}^{(i+1)h}\varphi(x)dx-\int_{(i-1)h}^{ih}\varphi(x)dx=\frac{h}{2}\big(\varphi((i+1)h)-\varphi((i-1)h)\big)$$
$$+O(h^4).$$

$n-1$個の条件を入れるためにつぎのような計算をする。

$$\frac{h}{2}(y'_{i+1}-y'_{i-1})+\frac{h^2}{12}(p_{i+1}y'_{i+1}-2p_iy'_i+p_{i-1}y'_{i-1})$$
$$=\frac{h}{2}\int y''dx+\frac{h^2}{12}\left(\int_{ih}^{(i+1)h}(py')'dx-\int_{(i-1)h}^{ih}(py')'dx\right)$$
$$=\frac{h}{2}\int(f-py'-qy)dx+\frac{h^2}{12}\left(\int_{ih}^{(i+1)h}-\int_{(i-1)h}^{ih}\right)(pf-$$
$$pqy+(p'-p^2)y')dx.$$

ここで上の求積公式とSimpsonの公式を利用す

れば, truncation error が $O(h^6)$ の差分公式を得る。

$$\left[1+\frac{p_{i+1}}{2}h+\frac{h^2}{12}(q_{i+1}-3p'_{i+1}+p_{i+1}^2)+\frac{h^3}{24}(p_{i+1}q_{i+1}-(p_{i+1}^2-p'_{i+1})')\right]w_{i+1}+\left[-2+\frac{h^2}{12}(10q_i-6p'_i-2p_i^2)\right]w_i+\left[1-\frac{p_{i-1}}{2}h+\frac{h^2}{12}(q_{i-1}-3p'_{i-1}+p_{i-1}^2)+\frac{h^3}{24}(-p_{i-1}q_{i-1}+(p_{i-1}^2-p'_{i-1})')\right]w_{i-1}=\frac{h^2}{12}(f_{i+1}+10f_i+f_{i-1})+\frac{h^3}{24}(p_{i+1}f_{i+1}-p_{i-1}f_{i-1}).$$

ここで $p(x)\equiv 0$ のときには、この差分公式は Numerov の差分公式と一致する。

(S^2, C^1) の場合には つぎのような consistency relation が成り立つ。

(17) $$w_{i+1}-w_i=\frac{h}{2}(w'_{i+1}+w'_i).$$

これより

(18) $$w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}=\frac{h}{2}(w'_{i+1}-w'_{i-1})$$

が得られる。$n-1$ 個の条件を入れるために (**) を $[(i-1)h, (i+1)h]$ で積分すると

$$y'_{i+1}-y'_{i-1}+\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}py'dx+\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}qy\,dx=\int_{(i-1)h}^{(i+1)h}f\,dx$$

これに対して部分積分と Simpson の公式を利用してつぎのような条件を入れる。

$$w'_{i+1}-w'_{i-1}+p_{i+1}w_{i+1}-p_{i-1}w_{i-1}-\frac{h}{3}(p'_{i+1}w_{i+1}+4p'_iw_i+p'_{i-1}w_{i-1})+\frac{h}{3}(q_{i+1}w_{i+1}+4q_iw_i+q_{i-1}w_{i-1})=\frac{h}{3}(f_{i+1}+$$

$4f_i+f_{i-1})$.

(18)と(19)から w_{i+1}, w_i, w_{i-1} に関する3項関係式が得られる。

$$\left[1+\frac{p_{i+1}}{2}h+\frac{h^2}{6}(q_{i+1}-p'_{i+1})\right]w_{i+1}+\left[-2+\frac{4h^2}{6}(q_i-p'_i)\right]w_i$$
$$+\left[1-\frac{p_{i-1}}{2}h+\frac{h^2}{6}(q_{i-1}-p'_{i-1})\right]w_{i-1}=\frac{h^2}{6}(f_{i+1}+4f_i+f_{i-1})$$

$p=1, 2$ の時はいずれも，あと1個の条件をつけることが必要である。それを利用して $w_i'(i=0,1,\cdots,n)$ が決定されることは，y' の項が表われない場合とまったく同様である。

§3. 数値例

最初の例は R.S. Varga [4] による

$$-y''+y=-x \quad , \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$$

なる2点境界値問題を取り扱う。 $h=0.1$ としたときの各方法による誤差

i	(S^6, C^3)	(S^4, C^2)	中心差分	Ritz-Galerkin
1	1.78×10^{-8}	0.69×10^{-8}	2.19×10^{-5}	2.20×10^{-5}
2	2.01	4.24	4.27	4.28
3	1.45	1.59	6.11	6.12
4	0.11	3.65	7.57	7.59
5	1.32	2.92	8.52	8.55

6	0.37	4.67	8.83	8.85
7	0.97	5.11	8.31	8.33
8	1.66	1.63	6.81	6.83
9	0.88	1.16	4.11	4.12
最大誤差	2.01×10^{-8}	5.11×10^{-8}	8.83×10^{-5}	8.85×10^{-5}
ℓ^2-誤差	1.65×10^{-8}	10.5×10^{-8}		

つぎに $y''=\frac{1}{2}(y'+y)$, $y(0)=0$, $y(1)=e$
なる2点境界値問題を $h=0.1$, 0.05 に対して考える

	(S^4, C^2)による誤差		(S^2, C^1)による誤差	
	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.1$	$h=0.05$
i				
2	1.28×10^{-8}	1.09×10^{-8}	0.48×10^{-4}	1.21×10^{-5}
4	0.58	0.93	0.90	2.26
6	1.68	1.19	1.24	3.12
8	1.00	0.41	1.50	3.74
10	2.01	1.37	1.60	4.10
12	0.66	0.01	1.60	4.15
14	0.07	0.52	1.50	3.83
16	4.03	3.55	1.20	3.07
18	2.32	2.03	0.73	1.82

参考文献

[1] J. P. Aubin ; Evaluation des Erreurs de Troncature des Approximation des Espaces de Sobolev. Jour. of Math. Anal and Appl. 21 (1968), 356-368.

[2] M. Sakai ; Spline interpolation and two-point boundary value problems. Memoris of the Fac. Sci. Kyushu Univ., 24, 1 (1970) to appear

[3] ―――― ; スプライン関数による微分方程式の数値解法. 昭和44度 九州大学大学院理学研究科数学専攻修士論文. 54 pp.

[4] R. S. Varga ; Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Inc (1962), 322 pp.

[5] W. G. Bickley ; Piecewise cubic interpolation and two-point boundary problems. The Computer Journal 11 (1968), 206-208.

[6] F. R. Loscalzo ; On the use of spline function for the numerical solution of ordinary differential equations. Univ. of Wisconsin (1968), 105 pp.