数理解析研究所講究録
第108巻 1971年 45-57

「くさびの刃定理」と「超函数の特異性の分解」

東大・理　森本光生

§0 序

1956年にBogolyubovは「くさびの刃定理」(Edge of the Wedge Theorem)をシアトルで講演発表した。この定理は、一変数函数論でのPainlevéの定理の多変数への拡張であるが、量子場の理論に直接応用されるので[8]、物理学者、数学者の協力により、一般化されていった。([1])

Martineauは1964年にリスボンでくさびの刃定理をコホモロジー的にとらえることにより、新しい証明を発表した。このアイデアを一言でいうと、「くさびの刃定理」は「正則函数の位相的境界値とコホモロジー的境界値の一致の原理」と「超函数に対するくさびの刃定理」よりの直接の帰結であるということである([2])。以下において我々はこのMartineauの理論の概略を説明し、これと佐藤幹夫氏による「超函数の特異性の分解理論」との関係を説明する。詳しい証明つきの議論が[2], [6]においてなされているから、ここでは一切証明

を述べない.

尚, このノートで超函数は hyperfunction を意味し, Schwartz の意味の超函数は "超函数 $\in \mathcal{D}'$" と書くことにする.

§1 古典的な くさびの刃定理

普通 くさびの刃の定理と呼ばれている定理の復習のために, [1] p63～68より いくつか定理を抜き書きする.

<u>定理1</u> (Painlevé)

複素平面の実軸と交わる領域を $\tilde{\mathcal{U}}$ とする. $\tilde{\mathcal{U}}$ で連続であり実軸上にない $\tilde{\mathcal{U}}$ の点で正則な函数 $\varphi(z)$ は $\tilde{\mathcal{U}}$ で正則である.

<u>定理2</u> (Bogolyubov)

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ を原点を頂点とする開いた角領域(ひらき方 $< \pi$) とする. $\mathbb{C}^2$ の原点 0 の近傍 $\tilde{\mathcal{U}} \ni 0$ に対し Γ のみに依存する別の近傍 $\tilde{\mathcal{U}}' \ni 0$ が存在し, $\tilde{\mathcal{U}} \cap T(\overline{\Gamma \cup -\Gamma})$ で連続 かつ $\tilde{\mathcal{U}} \cap T(\Gamma \cup -\Gamma)$ で正則な函数 φ は $\tilde{\mathcal{U}}'$ まで解析接続できる.

($A \subset R^2$ に対し $T(A) = R^2 \times iA \subset \mathbb{C}^2$ と書く).

<u>定理3</u> (Malgrange - Zerner)

$\Gamma = \{y_1 > 0,\ y_2 > 0\}$, $\partial\Gamma = \{y_1 = 0,\ y_2 \geqq 0\} \cup \{y_1 \geqq 0,\ y_2 = 0\}$ とする. $\mathbb{C}^2$ の原点 0 の近傍 $\tilde{\mathcal{U}} \ni 0$ に対し, 別の近傍 $\tilde{\mathcal{U}}' \ni 0$ が

存在し，$\tilde{\mathcal{U}}\cap T(\overline{\partial\Gamma})$ で連続かつ $T(\partial\Gamma)$の複素パラメータについて正則な函数 g は $\tilde{\mathcal{U}}'\cap T(\Gamma)$ まで正則に拡張できる．

この定理2，3はもちろん n 変数に対しても成立するがMartineauは次のような一般化を行った[3]：

<u>定理4</u>

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ を R^nに与えられた頂点を原点とする閉じた凸錐で，どれも全直線を含まないとする．$\mathbb{C}^n$の原点 0 の近傍 $\tilde{\mathcal{U}}$ に対し，別の近傍 $\tilde{\mathcal{U}}'\ni 0$ が存在して，次の性質をもつ：φ_j を $\tilde{\mathcal{U}}\cap T(\Delta_j)$に台をもつ $\tilde{\mathcal{U}}$上の超函数 $\in \mathcal{D}'(\tilde{\mathcal{U}})$ で $T(\Delta_j)$の複素パラメータについて相対内部で正則かつ $\mathcal{D}'$の〃みで境界値 $\delta_{\Delta_j}\varphi(x) = \displaystyle\mathcal{D}'\text{-}\lim_{\substack{y\downarrow 0\\ y\in\Delta_j}} \varphi_j(x+iy)$ が存在すると仮定する．

今 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \delta_{\Delta_j}\varphi(x)=0$ が $\tilde{\mathcal{U}}\cap\{\mathrm{Im}=0\}$ で成り立てば，$\tilde{\mathcal{U}}'\cap T(\gamma(\Delta_j\cup\Delta_k))$ に台をもつ $\tilde{\mathcal{U}}'$の上の超函数 $\psi_{jk}\in\mathcal{D}'$ で $T(\gamma(\Delta_j\cup\Delta_k))$の複素パラメータについて正則なものが存在し，$\displaystyle\varphi_j(z)=\sum_{k\neq j}\psi_{jk}(z) \qquad z\in\tilde{\mathcal{U}}'\cap\Delta_j$

が成り立つ．

(ここで $\gamma(A)$ はAの凸包を表わす)．

§2 Martineauによる証明

今 Δが R^nの原点を頂点とする閉じた凸錐で内点をもつ

と仮定する．φを $\tilde{\mathcal{U}}\cap T(\Delta)$の内部で正則な函数とすると，良く知られているように，いつでも超函数のいみでの境界値

$$\mathcal{B}\text{-}\lim_{y\to 0,\, y\in\Delta} \varphi(x+iy)$$

を考えることができる．Δが内点を持たない場合にもこの境界値の概念は拡張できる．Martineau は次の定理を証明した．

<u>定理5</u>（正則函数の境界値の一致の原理）

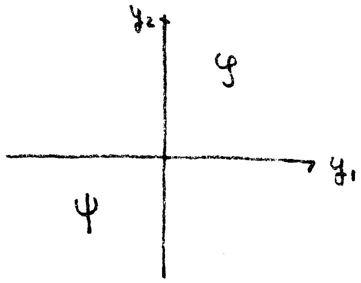
φが $\tilde{\mathcal{U}}\cap T(\Delta)$に台をもつ$\tilde{\mathcal{U}}$上の超函数$\in\mathcal{D}'$で，$T(\Delta)$の複素パラメータについて相対内部で正則とする．もし位相的な境界値 $\mathcal{D}'\text{-}\lim_{y\to 0,\, y\in\Delta}\varphi(x+iy)$が存在すればそれはコホモロジー的境界値と一致する：

$$\mathcal{D}'\text{-}\lim_{y\to 0,\, y\in\Delta} \varphi(x+iy) = \mathcal{B}\text{-}\lim_{y\to 0,\, y\in\Delta} \varphi(x+iy).$$

この定理は [2]において 正則函数芽の層$\mathcal{O}$の distributions prolongeables による一分解を用いて証明されている．この定理が 定理4の証明の才1段階であり，才2段階は超函数に対して定理4をとくことである．これは代数的計算でありわりと簡単である．実際 $n=1$ ならば 超函数に対する"Painlevé の定理"は超函数の定義の系である．$n=2$の場合に Bogolyubov の定理を超函数に対してといてみよう．簡単のため $\Gamma=\{y_1>0,\ y_2>0\}$ とする．$\tilde{\mathcal{U}}$を Stein 開集合と仮定して一般性を失わない．この時．

$$\mathcal{B}(u) = H^2_{\tilde{u}\cap R^2}(\tilde{u};\mathcal{O})$$
$$= H^1(\{z\in\tilde{u};\ y_1>0\},\ \{z\in\tilde{u};\ y_2>0\},\ \{z\in\tilde{u};\ y_1<0\},\ \{z\in\tilde{u};\ y_2<0\};\ \mathcal{O})$$

である。ここで $z=(z_1,z_2)=(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)$ である。



$\mathcal{B}\text{-}\lim\varphi = \mathcal{B}\text{-}\lim\psi$ とすると、

$\alpha_{12}=\varphi$, $\alpha_{1,-2}=0$

$\alpha_{-1,2}=0$, $\alpha_{-1,-2}=-\psi$

なる1-コサイクルのきめる超函数は零である。つまり $\exists\beta_1,\beta_{-1},\beta_2,\beta_{-2}$ で $\varphi=\beta_2-\beta_1$, $0=\beta_{-2}-\beta_1$, $0=\beta_2-\beta_{-1}$, $-\psi=\beta_{-2}-\beta_{-1}$ である。(つまり1-コサイクル α は0-コチェイン β のコバウンダリになっている)。$\beta_1=\beta_{-2}$ だから Bochner の定理により、これは0のある近傍まで解析接続され、そこで正則函数 ε を定める：$\varepsilon=\beta_1=\beta_{-2}$。又 $\beta_2=\beta_{-1}$ についても同様で、0のある近傍で正則な函数 ε' があって $\varepsilon'=\beta_2=\beta_{-1}$ となる。故に $\varphi=\varepsilon'-\varepsilon$, $\psi=\varepsilon'-\varepsilon$. よって φ と ψ が互に解析接続可能な事が示された。

以上の証明で本質的なのは（管状領域の正則包に関する）Bochner の定理で、あとはコホモロジーの計算にすぎない。多変数の場合に上の証明法を拡張するには まず Bochner の定理を拡張しなくてはならない。これが以下に述べる消滅

定理である．まず Bochner の定理で相対コホモロジーの言葉に翻訳しよう．

$G_0=\{y_1\leq 0,\ y_2\leq 0\}\subset R^2$ とおく．次のコホモロジー空間の列は完全である．

$$0\to H^0_{\tilde{u}\cap T(G_0)}(\tilde{u};\mathcal{O})\to H^0(\tilde{u};\mathcal{O})\to H^0(\tilde{u}\cap T(G_0)^c;\mathcal{O})$$
$$\to H^1_{\tilde{u}\cap T(G_0)}(\tilde{u};\mathcal{O})\to\cdots$$

まず解析接続の一意性より，$H^0_{\tilde{u}\cap T(G_0)}(\tilde{u};\mathcal{O})=0$ がでる．Bochner の定理よりは，

$$H^1_{\tilde{u}\cap T(G_0)}(\tilde{u};\mathcal{O})\to H^1_{\tilde{u}'\cap T(G_0)}(\tilde{u}';\mathcal{O})$$

の像がゼロになることがいえる．とくに，次の結果をえる：

$$\lim_{\substack{\longrightarrow\\ \tilde{u}\downarrow u}}\mathrm{ind}\ H^j_{\tilde{u}\cap T(G_0)}(\tilde{u};\mathcal{O})=0.\qquad j=0.1.$$

ここで $u=\tilde{u}\cap R^2$ を表わす．もっと一般に次の定理が成り立つ．

<u>定理6</u>

G を R^n の原点を頂点とする閉じた凸錐で，全直線を含まないとする．このとき任意の開集合 $u\subset R^n$ に対し，

$$\mathcal{H}^j(u;T(G);\mathcal{O})=\lim_{\substack{\longrightarrow\\ \tilde{u}\downarrow u}}\mathrm{ind}\ H^j_{\tilde{u}\cap T(G)}(\tilde{u};\mathcal{O})$$
$$=0\ ,\quad j\neq n.$$

この種の定理は，Martineau[2]，森本[5,6]によって得られた．最近 柏原[1]により拡張精密化されている．

くさびの刃の定理は 定理6より，コホモロジーの計算と

実行することによって得られる．この計算に意味と見通しを与えるものが佐藤幹夫氏の超函数の特異性分解の理論である．

§3 超函数の特異性の分解理論 [7]

我々の目的にそうようにこの理論を述べる．

Vをn次元実ベクトル空間，V^*をその双対空間とする．$S^*=V^*/R^+$とV^*の原点を中心とする単位球とを同一視する．$S^*\supset I$が凸とは$\tilde{I}=\bigcup_{t>0}tI$が凸かつ$\tilde{I}\neq V^*$のことと定義する．今$V\times S^*$上に1つの層$\mathcal{C}$を作り，

$$0\longrightarrow\mathcal{A}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}\xrightarrow{\beta}\pi_*\mathcal{C}\longrightarrow 0$$

が完全になるような写像βを作ることが佐藤の理論の目的の1つである．ここで$\mathcal{A}$はV上の実解析函数芽の層，$\mathcal{B}$はV上の超函数芽の層，$\alpha:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$は自然な単射，$\pi_*\mathcal{C}$は$\pi:V\times S^*\longrightarrow V$なる自然な射影による層$\mathcal{C}$の順像を表わす．

層$\mathcal{C}$と写像βを我々の定理6を用いることにより次のように構成することができる：

IをS^*の部分集合としよう．

$D(I)=\{x\in V;(x,\xi)\leq 0,\ \forall\xi\in I\}$

$TD(I)=V\times iD(I)$とおこう．もしIが開いてい

れば，$D(I)$は全直線を含まないVの閉じた凸錐である．$\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$をVの開集合，I, JをS^*の開凸集合とする．今 $\mathcal{U}\times I \supset \mathcal{V}\times J$ ならば $\mathcal{U}\supset\mathcal{V}$, $TD(I)\subset TD(J)$が成り立つから，制限写像：$\mathcal{H}^n(\mathcal{U};TD(I))\longrightarrow\mathcal{H}^n(\mathcal{V};TD(I))$ と自然な写像：$\mathcal{H}^n(\mathcal{V};TD(I))\longrightarrow\mathcal{H}^n(\mathcal{V}, TD(J))$ が定義できる．ここで

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{U};TD(I))=\lim_{\tilde{\mathcal{U}}\downarrow\mathcal{U}}\mathrm{ind}\, H^n_{\tilde{\mathcal{U}}\cap TD(I)}(\tilde{\mathcal{U}};\mathcal{O})$$

なる記号を用いた．この二つの写像を合成して，

$$\text{写像；}\ \mathcal{H}^n(\mathcal{U};TD(I))\longrightarrow\mathcal{H}^n(\mathcal{V};TD(J))$$

がえられる．この写像は，$\mathcal{U}\times I$ を動かすときに鎖条件を満すことは明らかである．したがって この写像と 対応：$\mathcal{U}\times I\longmapsto\mathcal{H}^n(\mathcal{U};TD(I))$ は $V\times S^*$ 上の準層を定義する．この準層に同伴する層を $\mathcal{C}$と定義する．

定理7

$\mathcal{U}$をVの開集合，IをS^*の凸開集合とする．層$\mathcal{C}$の$\mathcal{U}\times I$上の横断面の全体$\mathcal{C}(\mathcal{U}\times I)$は次の式で与えられる：

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}\times I)=\lim_{I'\subset\subset I}\mathrm{proj}\,\mathcal{H}^n(\mathcal{U};TD(I'))$$

ここで I'は Iに真に含まれる凸開集合を表わす．

次に 写像βを作ろう．まず

$$\mathcal{B}(\mathcal{U})=\mathcal{H}^n(\mathcal{U};V)=\lim\mathrm{ind}\, H^n_{\hat{\mathcal{U}}\cap V}(\hat{\mathcal{U}};\mathcal{O})$$
$$=H^n_{\hat{\mathcal{U}}\cap V}(\hat{\mathcal{U}};\mathcal{O})$$

に注意しよう．S^*の任意の凸閉集合Iに対して $V \subset TD(I)$ であるから 自然な写像

$$\beta_I : \mathcal{H}^n(u;V) \longrightarrow \mathcal{H}^n(u;TD(I))$$

が存在する．このβ_Iとはり合わせて，写像

$$\beta : \mathcal{B}(u) = \mathcal{H}^n(u;V) \longrightarrow \mathcal{C}(u \times S^*) = (\pi_* \mathcal{C})(u)$$

が定義される．

定理8

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(u) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}(u) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(u \times S^*) \to 0$$

は完全列である．

この層$\mathcal{C}$を用いると，u上の超函数がある正則函数の境界値となるための必要十分条件が次のように書ける．

定理9

ΓをVの原点を頂点とする開凸錐とする．$u \in V$の開集合とする．今S^*上の閉凸集合Iを$\overline{\Gamma} = -D(I)$となるようにえらぶ．この時$f \in \mathcal{B}(u)$に対し$\mathrm{supp}\,\beta(f) \subset u \times I$が成り立つための必要かつ十分条件は任意の開凸錐$\Gamma' \subset\subset \Gamma$に対し$u$の複素近傍$\tilde{u}_{\Gamma'}$と$\tilde{u}_{\Gamma'} \cap T(\Gamma')$で正則な函数$\varphi_{\Gamma'}$が存在して$f(x) = \mathcal{B}\text{-}\lim\limits_{y \to 0,\, y \in \Gamma'} \varphi_{\Gamma'}(x+iy)$となることである．

又境界値をとる作用素$\mathcal{B}\text{-}\lim$は単射であることが，写像αの単射性と同様に示せる．つまり

定理10

境界値をとる作用素 $\mathcal{B}$-lim は単射的である.

今1つ記号を導入する.

$$\tilde{\mathcal{H}}^0(\mathcal{U}; T(\Gamma)) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Gamma' \subset\subset \Gamma}} \mathrm{ind}\, \mathcal{H}^0(\mathcal{U}; T(\Gamma'))$$

ここで $\mathcal{H}^0(\mathcal{U}; T(\Gamma')) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \tilde{\mathcal{U}} \downarrow \mathcal{U}}} \mathrm{ind}\, H^0(\mathcal{U} \cap T(\Gamma'); \mathcal{O})$ である.

この記号を用いると, 上の定理9, 10は次のように云いかえられる:

コホモロジー的境界値 $\mathcal{B}$-lim は $\tilde{\mathcal{H}}^0(\mathcal{U}; T(\Gamma))$ から $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ の中への写像と考えられる. この写像は単射的であり 像は $\mathrm{supp}\,\beta(f) \subset \mathcal{U} \times \mathcal{I}$ となる超函数 f の全体と一致する.

以上の定理7, 8, 9, 10は 定理6よりコホモロジーの計算によって導き出される. 証明付きの詳論は [6] に書いたからここでは結果を述べるにとどめる.

さて くさびの刃の定理にもどろう. 次の形でくさびの刃定理を証明する.

<u>定理11</u> (超函数に対するくさびの刃)

$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_m$ を V の原点を頂点とする開凸錐とする. 今 $\mathcal{U} \subset V$ を開集合とし $\varphi_j \in \tilde{\mathcal{H}}^0(\mathcal{U}; T(\Gamma_j))$ が与えられていると仮定する. (φ_j は 正則函数の"芽"である).

今 $\sum_{j=1}^{m} \delta_{\Gamma_j} \varphi_j = 0$ とする. ($\delta_{\Gamma_j} = \mathcal{B}\text{-}\lim_{\Gamma_j}$ と略記した)

この時 $\psi_{jk} \in \tilde{\mathcal{H}}^0(\mathcal{U}; T(\gamma(\Gamma_j \cup \Gamma_k)))$ が存在して

$\varphi_j = \sum_{k \neq j} \psi_{jk}$ が $\tilde{\mathcal{H}}^0(u; T(\Gamma_j))$ で成立する.

<u>証明</u>

$f = \delta_{\Gamma_j} \varphi_j = -\sum_{k \neq j} \delta_{\Gamma_k} \varphi_k$ なる超函数を考えよう.

$\mathrm{supp}\, \beta(f) \subset u \times (\overline{I} \cap (\bigcup_{k \neq j} \overline{I_k})) = \bigcup_{k \neq j} (u \times \overline{I_j \cap I_k})$

ここで I_j は $-\overline{\Gamma_j} = D(I_j)$ となる S^* の開凸集合である.

今 C の性質(定理9)により 定理11でいうような ψ_{jk} が存在して

$$\delta_{\Gamma_j} \varphi_j = \sum_{k \neq j} \delta_{\gamma(\Gamma_j \cup \Gamma_k)} \underline{\psi_{jk}} \quad \text{となる.}$$

何故ならば $D(I_j \cap I_k) = -\gamma(\Gamma_j \cup \Gamma_k)$ であるからである.(ここで 層 C の"分解可能性"を用いている. これは我々の議論だけでは示されていないが, 佐藤幹夫氏の Radon 変換の考えを用いると証明できる. 数理研で話した時には気が付かなかったが, その後 代数解析セミナーの方々に指摘を受けた.) $\delta_{\gamma(\Gamma_j \cup \Gamma_k)} \psi_{jk} = \delta_{\Gamma_j} \psi_{jk}$ $(j \neq k)$ が成り立つから δ_{Γ_j} の単射性より求める関係式がえられる:

$$\varphi_j = \sum_{k \neq j} \psi_{jk}. \qquad \boxtimes$$

§4 あとがき.

数理研で話した原稿とほとんど同じであるが, いくつかの点を訂正した. 重大な所は 定理7と定理9で, 話しをした形では正しくないと 代数解析セミナーのメンバーの方々に

御指摘を受けた．佐藤氏の特異性の分解理論[7]の概略はこのシンポジウムでも講演があったが，1969年夏の堅田シンポジウムの報告集，1970年春の片瀬のシンポジウムの報告集に発表される予定になっている．

又くさびの刃の定理を我々は定理11の形で証明したが，これは層Cの理論との関連の上ではもっとも良い形だと思う．ここではMalgrange-Zerner型のくさびの刃定理が脱落している．これは層Cの理論が実解析的座標変換に対して不変なのに対し，Malgrange-Zerner型のくさびの刃定理はそうでないことに帰因する．だからこの脱落はもっともなのである．尚Malgrange Zerner型のくさびの刃の定理はもちろん，定理4も超函数に対して成り立つ[4]．Malgrange-Zerner型のくさびの刃定理の証明も代数化が試みられている[10]．

§5 文献

[1] 梶原壌二 複素関数論 森北出版

[2] A. Martineau : Distributions et Valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. Intern. Summer Course on The Theory of Distributions Lisbon. 1964. p195-326.

[3] A. Martineau, Théorèmes sur le prolongement analytique du type "Edge of the Wedge Theorem". Séminaire Bourbaki, 20ème annee. №. 340 (1967)

[4] A. Martineau. Le "Edge of the Wedge Theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis. Tokyo. 1969.

[5] M. Morimoto; Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier 19 (2).

[6]. M. Morimoto. Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Section 1 Vol 17.

[7] M. Sato. Hyperfunctions and Differential equations Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis. Tokyo. 1969.

[8] R.F. Streater & A.S. Wightman: PCT, Spin & Statistics, and all that, Benjamin.

[9] 柏原正樹: この報告集にのる講演

[10] M. Morimoto: Une remarque sur le théorème du Edge of the Wedge" de A. Martineau. Proc. Japan Acad. Vol 45, №6. (1969) pp 446-448.