数理解析研究所講究録
第 108 巻 1971 年 329-340

指数問題について

東大 教養 内山康一

0. compact manifold X 上で elliptic (pseudo-) differential operator $P : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ を考える。そのとき、global な量 a-index P = dim ker P − dim coker P が、local data である symbol $\sigma(P)$ を通じて定まる、t-index P に等しいというのが Atiyah-Singer の定理であった。最近 L. Hörmander (と Atiyah) はこの定理の成立する operator を (classical) elliptic op. からある種の hypoelliptic operator へ拡張した。以下、

L. Hörmander "On the index of pseudodifferential operators"

の idea を紹介する。

注意 1) elliptic op. P に対し、その principal symbol $\sigma(P)$ が K(TX) (TX は X の cotangent bundle で、K(TX) は 'compact 台の' K 群) の元を定めかつ、K(TX) の任意の元は、ある 0次 elliptic pseudo-diff op. で実現されることが重要であった。ここで elliptic op. とは principal symbol が non-singular

という意味である。しかし index をもつ作用素はこれに限らぬわけで，定理の枠は拡張されることが期待されていた。K(TX) の定義からもそういうことはいえる。拡張にあたって，K(TX) の元が全て elliptic op. で実現され，それについては指数定理が成立していたから，手順として，

㋑ 新しい作用素 P が a-index をもつ．symbol をもつ．

㋺ P を ㋑ の枠内で変形して，classical elliptic op. に変形する．

㋩ ㋺ の変形（homotopy）に対し，a-index，symbol の定める K(TX) の元の不変性を示す．

は自然である．

注意 2）classical elliptic op. の場合は principal symbol のみを考えたが，後で述べるように，ここでは total symbol というべきものを考えている．そして，Hörmander の考えた class はある程度の degenerated elliptic op. を含むことができる．

話は全て C^∞ の枠である．方法は Hörmander の開発した pseudodifferential operator（[2]）によっており，$\mathcal{A}$（実解析）で考えるための道具，即ち基本解あるいは parametrix の構成，その他の解析はまだよく出来てない．更に $\mathcal{A}$ での話を徹底すれば，特有のものとして 'hyper-differential' op. が登場するが，X の実解析構造と結びつきの深い作用素があるのか，未だ

わからない。これも先回りのしすぎだが，超函数論的 operator theory は指数定理の相対化のとき有効と期待される。

1. まず pseudo-diff. op. を次のように定義する（[ ]）。E, F を X 上の complex vector bundle, $E \xrightarrow{\pi_E} X$, $F \xrightarrow{\pi_F} X$ とし，$C^\infty(X;E)$, $C^\infty(X;F)$ は C^∞-sections をあらわす。

$L^m_{\rho,\delta}(X;E,F) \ni \mathcal{P}$ とは，$\mathcal{P} : C^\infty(X;E) \to C^\infty(X;F)$ が線型，連続．更に，diffeom $\kappa : X \supset U \longrightarrow \omega \subset \mathbb{R}^n$ かつ，E, F はそこで直積構造をもつ，即ち，$\varphi_E : \pi_E^{-1}U \xrightarrow{\cong} \omega \times \mathbb{C}^{N_E}$, $\varphi_F : \pi_F^{-1}U \xrightarrow{\cong} \omega \times \mathbb{C}^{N_F}$ として，このとき，任意の $f \in C_0^\infty(U)$ に対し，$\omega \times \mathbb{R}^n$ 上の $N_F \times N_E$ 行列値関数：

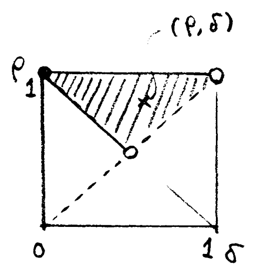
(1) $$p_f(\cdot,\xi)v = e^{-i\langle\cdot,\xi\rangle}(\varphi_F^{-1})^*\mathcal{P}(f\varphi_E^* v e^{i\langle\cdot,\xi\rangle})$$

ただし $\xi \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{C}^{N_E}$.

が $\omega \times \mathbb{R}^n \ni (y,\xi)$ について C^∞-級である。かつ，任意の compact $L \Subset \omega$, 多重指数 α, β に対し，定数 C があって，

(2) $$\| p_{f\,(\beta)}^{(\alpha)}(y,\xi) \| \le C(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

ただし $$p_{f\,(\beta)}^{(\alpha)}(y,\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial\xi^\alpha \partial y^\beta} p_f(y,\xi).$$



m, ρ, δ の範囲は，$m \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqq 1-\rho \leqq \delta < \rho \leqq 1$$

とする。（$\rho > \frac{1}{2}$ に注意。）

次に，$P \in L^m_{\rho,\delta}$ の symbol を定義する．$TX \xrightarrow{\pi} X$ とし，compact $K \subset U \subset X$ とする．$\pi^{-1}K$ 上の symbol とは，$\xi \in (TX)_x$，$x \in K$，

(3) $$P(x,\xi) \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi_F^{-1} P_f\,(\kappa(x),\ {}^t\kappa'(x)^{-1}\xi\,)\,\varphi_E$$

である．但し，$f \in C_0^\infty(U)$ は K 上で 1 とする．$P(x,\xi) \in \mathrm{Hom}\,((\pi^*E)_\xi, (\pi^*F)_\xi\,)$ と考えられるが，定義に使った f，κ 等に依存している．そこで，$\pi^{-1}K$ 上の別の symbol P' との関係は，$P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ の記号を使うと，

(4) $$\begin{cases} P'(x,\xi) \sim \sum P^{(\alpha)}(x,\xi)\,\varphi_\alpha(\xi) \\ \varphi_\alpha(\xi) \text{ は 次数が } |\alpha|/2 \text{ 以下の多項式} \end{cases}$$

と，ξ について'漸近展開'できる．([2]) 従って (2) の評価と $\rho > \frac{1}{2}$ から，

(4)' $$|P'(x,\xi) - P(x,\xi)| \leq C|\xi|^{1-2\rho} \qquad (|\xi| \text{ 十分大})$$

がわかる．

E, F の metric とは別に以下の metric を π^*E, π^*F に導入する．

<u>定義</u> π^*E 上の cont. hermitian metric $\|\cdot\|$ が tempered というのは任意の compact $K \subset X$ に対し，定数 C_K, M_K が存在して，$(x,\xi) \in \pi^{-1}K$ なら

(5) $$C_K^{-1}(1+|\xi|)^{-M}\|e_0\| \leq \|e_\xi\| \leq C_K(1+|\xi|)^M\|e_0\|$$

が成立することである．ここで e_ξ とは $e \in E_x$ の $E_x \cong (\pi^*E)_\xi$ による像．この t. h. metric で計った symbol の operator norm を $|\cdot|$ とかく．

この metric を使って hypoellintic op. のある class を次のように定めることができる（[2] 参照）

<u>定義</u>　$\mathcal{P} \in L^m_{\rho,\delta}(X; E, F)$ が hypoelliptic of type ρ, δ（HE(ρ,δ) と略す）とは，任意の compact $K \subset X$，$\pi^{-1}K$ 上の symbol P に対し，$P(x,\xi)$；$(\pi^* E)_\xi \longrightarrow (\pi^* F)_\xi$ が $\pi^{-1}K$ 内のある compact を除いてそこで同型，かつある固定した t.h. metric で計って

$$(6) \qquad |P(\xi)^{-1}| \le C_1 \quad ; \quad \xi \in \pi^{-1}K, \quad |\xi| > C_2$$

$$(7) \qquad |P^{(\alpha)}_{(\beta)}(\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

が成立する．

<u>例</u>　t.h. metric の増大度は，operator の次数に関係する．

① t.h. metric として，E, F からみちびかれるものを使うと，0 次の classical elliptic pseudo-diff op. は $\rho=1$, $\delta=0$ で定義をみたす．

② $E = \oplus E_i$　$F = \oplus F_j$ とし，各 E_i，F_j について

$$\| e^i_\xi \| = (1+|\xi|)^{s_i} \| e^i_0 \|, \qquad \| f^j_\xi \| = (1+|\xi|)^{t_j} \| f^j_0 \|$$

とすれば Douglis-Nirenberg の意味での elliptic system が定義をみたす．

③ $\rho \neq 1$ でないのを考えるのは，hypoelliptic op. の定数係数における特長づけの形に由来する．変数係数での特長づけは未完で，この定義はその一部を与えるにすぎないが，条件が座標系のとり方に依らないのが重要である．

X の座標近傍に合せた 1 の分解を $\sum \varphi_j = 1$ とする．$\pi^{-1}(\mathrm{supp}\,\varphi_j)$ 上の symbol を P_j とするとき，次の命題の成立が初めに述べた手順①を保証する．

命題 1. $\mathcal{P} \in HE(\rho, \delta)$ とするとき，$\mathcal{P}$は a-index をもつ．更に $P(\xi) = \sum \varphi_j(\pi\xi) P_j(\xi)$ とおくと，TX 内の compact を除いて $\pi^*E \to \pi^*F$ への isom を定める．従って K(TX) の元を定める．

<証明の方針> $HE(\rho, \delta)$ は adjoint, parametrix がその枠でとれることから前半が従う（[2]）．K(TX) の元が P のとり方によらないことは，(4)′ の評価から従う．$P(\xi)$ と $P'(\xi)$ 2つあったとして，$tP + (1-t)P'$ が $|\xi|$ が十分大きいところで isom. になり（$0 \leq t \leq 1$）K(TX) の定義から P と P′ は同じ元を定める．

2. index の stability．後で行う deformation について手順の⑵の部分を準備しておく．t-ind については K(TX) の定義を考えればすむ．a-ind については，hypoellipticity にもとづいて，$C^\infty(X)$ の代りに，Sobolev space $H_{(s)}(X)$（[2] §5）を使う．$\mathcal{P}$の次数が m のとき，$\mathcal{P}: H_{(s)} \to H_{(s-m)}$ なら $\mathcal{P}$は有界作用素で済むが，$\mathcal{P}; H_{(s)} \to H_{(t)}$ で扱う必要があるので，閉作用素の枠で準備する必要がある．

parameter space I は compact，E, F は Banach space とする．$\{P_t\}_{t \in I}; E \to F$ が closed family とは graph $G = \{(t, u, f); t \in I, u \in \mathcal{D}(P_t), P_t u = f\}$ が $I \times E \times F$ で closed なこと，strongly cont. family とは P_t が有界で，t について強

位相で連続なこと，compact とは $I\times\{\|u\|_E=1\}$ の像が F で相対 compact なことと定義する．

<u>命題</u> 2　$\{P_t\}: E\to F$ において (i) $\{P_t\}$ は closed family (ii) $\{Q_t\}: F\to E$ st. cont. family (iii) $\{K_t\}: E\to E$ compact (iv) $Q_tP_t\subset I_E+K_t$, $t\in I$. を仮定すると，index P_t は上半連続である．

<u>系</u> 3　$\{P_t\}$ とその adjoint $\{P_t^*\}: F^*\to E^*$ も又仮定をみたすなら　index P_t は t について loc. const. である．

次に，$HE(\rho,\delta)$ において cont. family を次のように設定する．まず $L^m_{\rho,\delta}$ における cont. family $\mathcal{P}$ とは　$\mathcal{P}: I\to L^m_{\rho,\delta}(X:E,F)$ の map であり，$\mathcal{P}: C^\infty(X;E)\times I\to C^\infty(X;F)$ は cont. かつ 式(1) の P_f は $\omega\times\mathbb{R}^n\times I\to N_F\times N_E$ 行列への連続関数で評価(2) が $L\times\mathbb{R}^n\times I$ で一様に成立するものである．次に t. h. metric の family とは，$TX\times I\xrightarrow{\pi}X$ とおもって定義し直す．(5) は $\pi^{-1}(K\times I)$ 上で一様に成立する．従って $HE(\rho,\delta)$ の cont. family とは，ある m に対し，$L^m_{\rho,\delta}(X;E,F)$ の元であり，かつある $T(X)\times I$ 上にもち上げた π^*E, π^*F の t. h. metric について評価 (6) (7) が $K\times I$ 上で成立するものをいう．(7) から (5) の評価を使って，

$$|P_{f}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(y,\xi)|\le C(1+|\xi|)^{2M-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$ がわかるので

以下 $m\le 2M$ と仮定してよい．

HE(ρ, δ) での cont. family $\mathcal{P}$ が与えられたとき, 同じ t. h. metric について HE(ρ, δ) の cont. family で $\mathcal{P}$ の parametrix Q が構成できる. [2] における考察を parameter をこめてくり返す必要があるが.

又, $\mathcal{P}$ の adjoint は, E, F の dual bundle, dual metric を考えて, それに対して HE(ρ, δ) の元になることもわかる. 従って, これらをみとめると命題2に応用して, 次の定理を得る.

<u>定理</u> 4. $\mathcal{P}$ は parameter space を I とする HE(ρ, δ) の cont. family とする. そのとき, a-ind $\mathcal{P}$, t-ind $\mathcal{P}$ は loc. const.

〈証明の方針〉 t-ind $\mathcal{P}$ は $K(TX)$ の定義から従う. $\mathcal{P}; H_{(s)} \to H_{(t)}$ とすると closed family を作る. parametrix Q が $H_{(t)} \to H_{(s)}$ について st. cont. になるように t を定める. $Q\mathcal{P} - 1 = \mathcal{K}$ は smooth であり X compact だから compact family を作る.

3. <u>指数定理</u> 5. HE(ρ, δ) ∋ $\mathcal{P}$ ならば

$$\text{a-ind}\,\mathcal{P} = \text{t-ind}\,\mathcal{P}.$$

〈証明の方針〉 $\mathcal{P}$ を変形して, cont. family を作り, 結局 classical elliptic operator につなげられればよい.

local charts を定め, その1の分解を $\sum \psi_i = 1$, その supp ψ_i 上 1 なる ψ_i', さらに supp ψ_i' 上 1 である ψ_i'' を使って,

$$\mathcal{P}_0 u \underset{\text{def}}{=} \sum \psi_i \mathcal{P} \psi_i' u = \sum \psi_i \underline{\mathcal{P} \psi_i'} \psi_i'' u$$

$$= \sum \psi_i \varphi_F^{i*} p^i(y, D)(\varphi_E^{i-1})^* \psi_i'' u$$

とかく．以下 $\mathcal{P}$ の代りに $\mathcal{P}_0$ を扱う．なぜなら $\mathcal{P}-\mathcal{P}_0$ は smooth だから index をかえないからである．$\mathcal{P}_0$ の代りに各 $p^i(x,D)$ を扱う．それを TX を半径 r の disc bundle $B(X)$ への retraction で変形する．

$$\chi(t)=\begin{cases}1 & t\le 1\\ \dfrac{2}{t} & t\ge 3\end{cases}$$ なる C^∞-関数とする．

$$p^i_\varepsilon(y,\xi)=p^i(y,\xi\chi(\varepsilon r^i(y,\xi)))$$ とおく．

ここで r^i は $\kappa^i: U_i\to\omega_i\subset R^n$ diffeom. とするとき，

$$r^i(\kappa^i(x),\xi)=|{}^t\kappa^{i\prime}(x)\xi| \quad ,\ \xi\in R^n,\ x\in U_i$$

である．右辺は TX での riemannian metric．

$$\mathcal{P}_\varepsilon u=\sum\psi_i\,\varphi_F^{i*}\,p^i_\varepsilon(y,D_y)\,(\varphi_E^{i-1})^*\,\psi_i' u$$

とおく．（$\varepsilon=0$ で元の $\mathcal{P}_0$ に一致する．）

$p^i_\varepsilon(y,\xi)$ は $r^i(y,\xi)\ge 3/\varepsilon$ なら，

$$p^i_\varepsilon(y,\xi)=p^i\Big(y,\ \frac{2\xi}{\varepsilon r^i(y,\xi)}\Big)$$

$$=p^i(\kappa(x),\ 2\xi/\varepsilon|{}^t\kappa^{i\prime}(x)\xi|)$$

だから ξ について 0-homogeneous になる．従って $\mathcal{P}_\varepsilon$ の principal symbol を考えることができて，supp ψ_i 上の symbol は

$$P^i(\xi)\underset{def}{=}\varphi_F^{i-1}\,p^i(\kappa^i(x),\ {}^t\kappa^{i\prime}(x)^{-1}\xi)\,\varphi_E^i$$

$$=\varphi_F^{i-1}\,p^i\Big(\kappa^i(x),\ {}^t\kappa'(x)^{-1}\frac{2\xi}{\varepsilon|\xi|}\Big)\quad\Big(|\xi|>\frac{3}{\varepsilon}\Big)$$

であるから，$\mathcal{P}_\varepsilon$ は $\varepsilon\neq 0$ で elliptic．

あとは，ε が十分 0 に近い範囲で $\mathcal{P}_\varepsilon$ が cont. family を作ればよい．まず t.h. metric の family は，$\Phi_\varepsilon: TX\to TX$

（$\Phi_\varepsilon(\xi)=\xi\chi(\varepsilon|\xi|)$）を使って，　$0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$ に対し，

$$\|e_\xi\|_\varepsilon=\|e_{\Phi_\varepsilon(\xi)}\|\quad,\ e\in E_{\pi\xi}$$

で定める．右辺の $\|\cdot\|$ は元の t.h. metric である．$\|\cdot\|_\varepsilon$ で計った operator norm は $|\cdot|_\varepsilon$ で示す．各 $P_\varepsilon^i(\xi)$ について評価する．

(6)，(7) を $|\cdot|_\varepsilon$ でかき直すと

$$|P_\varepsilon^i(\xi)|_\varepsilon\le C,\quad |P_\varepsilon^i(\xi)^{-1}|_\varepsilon\le C\quad,\ |\xi|>C,$$

(4)′ は　$$|P_\varepsilon^i(\xi)-P_\varepsilon^j(\xi)|_\varepsilon=O(\Phi_\varepsilon(\xi)^{1-2\rho})$$ をあらわす．

従って，十分大きい ξ i.e. $|\xi|>C$ に対して，

$$|\sum\psi_i(\pi\xi)P_\varepsilon^i(\xi)|_\varepsilon\le C,\ |\sum\psi_i(\pi\xi)P_\varepsilon^i(\xi))^{-1}|_\varepsilon<C\ .$$

次に(7)に対応する評価を出すには，合成関数の微分公式を使って $P_{\varepsilon}{}^{i}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(\xi)$ を $P^{i}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(\Phi_\varepsilon(\xi))$ で評価することが必要．結局，

$$|P_{\varepsilon}{}^{i}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(\xi)|_\varepsilon\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

を得る．よって $\mathcal{P}_\varepsilon^i$ は $L^{2M}_{\rho,\delta}(X;E,F)$ で cont. family を作り，(4)′ も一様に成立するので，$\mathcal{P}_\varepsilon$ の symbol $P_\varepsilon(\xi)$ に対し，

$$|P_\varepsilon(\xi)-\sum\psi_i(\pi\xi)P_\varepsilon^i(\xi)|_\varepsilon\le C|\xi|^{1-2\rho}\quad,\ |\xi|>C$$

が成立する．故に，これらから，求める評価が得られる．

4．今迄の議論は X compact の条件の下である．X が noncompact であるときは，operator $\mathcal{P}$ に制限をつけることによって修正されうる．つまり，ある compact $X_0\subset X$ があって，X_0 の外で isom. である擬微作用素 $\mathcal{P}_0$ を $\mathcal{P}$ から引くと，$\mathcal{P}-\mathcal{P}_0$ の核超関数の台が $X_0\times X_0$ に含まれる．

この制限は X のある種の'compact化' と考えられる. Atiyah-Singer による指数定理の証明 ([1]) で $K(T\mathbb{R}^n)$ の元である Bott-element に対応する operator の a-ind が 1 になることが核心の1つであった。 K_G-理論によって特殊な場合へ帰着して計算されたのだが, Hörmander は $HE(\rho,\delta)$ の例として, その直接証明を与えている. $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ とおもい, $\mathbb{C}^n$ の p 次外積を Λ^p とする. $\mathbb{C}^n$ から Λ^p への関数(section) を $C^\infty(\Lambda^p)$, $L^2(\Lambda^p)$ とする.

operator $(x^e + d)f = \sum x_i dx_i \wedge f + df$, その formal adjoint を $x^i + \delta$ とする. 今 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とし, ともに原点の近くで 1 とする. 2次元 parameter (ε, τ) をもつ operator $A_j^{\varepsilon,\tau} = \varphi(\tau x)\chi(\varepsilon D)\partial_j \varphi(\tau x)$ を考え, d, δ において ∂_j を $A_j^{\varepsilon,\tau}$ でおきかえて, $\mathcal{P}^{\varepsilon,\tau} = (x^e + d_A) + (x^i + \delta_A) ; L^2(\Lambda^{even}) \longrightarrow L^2(\Lambda^{odd})$ とする. $\mathcal{P}^{0,0} = (x^e + d) + (x^i + \delta)$ である. この operator については $\dim\ker \mathcal{P}^{0,0} = 1$, $\dim\operatorname{coker} \mathcal{P}^{0,0} = 0$ 従って index 1 がわかる. 一方, φ, χ をうまくとると, $\tau, \varepsilon \neq 0$ で $\mathcal{P}^{\varepsilon,\tau}$ は Bott element に対応し, かつ family $\mathcal{P}^{\varepsilon,\tau}$ に命題2を適用できる. 従って Bott element の a-ind が 1 とわかる.

── 文献 ──

[1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, The index of elliptic operators I. Ann. of Math. 87 (1968), 484-530

[2] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. 10 (1967), 138-183.

[3] " , On the index of pseudodifferential operators.