数理解析研究所講究録
第 112 巻 1971 年 174-176

Filtering Process の満たす確率微分方程式について

神戸商大　　藤崎 正敏

§0. 序

その源を工学の通信理論に置く Non Linear Filtering の中でも，とりわけ filtering process の満たす確率微分方程式を求める問題については，数年来多くの研究者諸氏によって取り組まれてきたが，最近になって今まで得られた結果を含む極めて一般的な形でほぼ解決された（Fujisaki - Kunita [1]）。

ところで filtering problem において取扱う対象を Markov 過程の場合に限ると事情はより具体的になる。ここでは Markov 過程の場合における上に述べた確率微分方程式の意味づけと，それが stochastic control と密接に結びついた形での問題提起に留めたい。(*)（stochastic control については Shiryaev [2]）

§1.

(*) 以下の話に現われる記号とか式は多少 symbolize してあるので詳細は [1] を参照のこと。

$\{x_t\}$ を (strong Feller) Markov process, $\{w_t\}$ を $\{x_t\}$ と独立な Wiener process, $\{y_t\}$ を次の確率微分方程式によって定まる確率過程とする;

(1) $$dy_t = a(x_t, y_t)dt + b(y_t)dw_t ,$$

$\mathcal{F}_t$ を $\{y_s, s\le t\}$ によって生成される σ - field とするとき, filtering process (又は non - linear filter) $\pi_t(f)$ は $E[f(x_t)|\mathcal{F}_t]$ によって定義され, そしてこれは次の式 (2) を満たすことが知られている ([1]);

(2) $$\pi_t(f) - \pi_0(f) = \int_0^t \pi_s(Af)ds + \int_0^t \{\pi_s(h\cdot f) - \pi_s(h)\pi_s(f)\}dZ_s,$$

ここに $\{Z_t\}$ は $\{y_t\}$ にある種の変換を施すことにより得られた Wiener process, A は x_t の生成作用素, f は $\mathcal{D}(A)$ (= A の domain) に属する函数, そして h は $\frac{a}{b}$ (a と b は方程式 (1) の係数) なる函数を表わす。

この (2) 式を普遍化して単に $\pi_t(\cdot)$ に関する確率微分方程式とみてこれを解くという問題について述べる前に, $\{x_t\}$ と函数 h により具体的な条件を与えれば (2) 式自体の持つ固有の意味を明らかにすることができるということに少し触れてみたいと思う。すなわち process $\{y_t\}$ から得られる情報を用いて $\pi_t(f)$ が (2) により具体的に構成できるという意味において。

この場合の formulation としては, $\{y_t\}$ を observable な確率

過程とし（従って所与とする），係数 a と b（従って h），函数 f，A，そして $\{Z_t\}$ と $\{\pi_s(h)\}$ の何れをも与えられているものとする。[*] さらに $\left|\frac{1}{b}\right| > 0$，かつ $h(x)$ と $g = \pi_s(h)$ を有界函数と仮定する。そうすると $\pi_t(\cdot)$ の確率微分方程式；

$$(2)' \quad \pi_t(f) - \pi_0(f) = \int_0^t \pi_s(Af)ds + \int_0^t \{\pi_s(h\cdot f) - g\cdot\pi_s(f)\}dZ_s$$

は x_t が Markov chain（従って A が有界作用素），及び α（$0<\alpha<\frac{1}{2}$）次の対称安定過程の場合は解けて，函数 f について linear な解が逐次近似にて求まる。しかもその解は pathwise に一意であるから，従ってそれは $E[f(x_t)|\mathcal{F}_t]$ に他ならぬ。

しかしながら先程も述べた様に，(2) 式を，個々の$\underbrace{\text{持つ}}^{\text{函数の}}$意味を捨象して，単に $\pi_t(\cdot)$ に関する方程式と見なすとき，この式がある意味での唯一解を持てばそれは measure-valued な Markov 解であることが期待される。けれども現在においてはこの方程式に関する限りほとんど何も解決されていない。

文献

[1] M. Fujisaki and H. Kunita, *Non linear filtering problems in time continuous stochastic processes*, to appear

[2] A. N. Širjaev, *Some new results in the theory of controlled random processes*, Trans. Fourth Prague Conf. 1967. pp 113–203.

(*) $\{Z_s\}$，$\{\pi_s(h)\}$ をも所与とすることができるというのは Meyer 分解の一意性に依る。