数理解析研究所講究録
第112巻 1971年 177-186



# ブラウン運動とDirichlet空間 (I)

阪大 理　池田信行
岡部靖憲

## §1. 序

空間 $D$ を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする. 境界の滑らかさは一切仮定しない。

よく知られているように、任意の $\alpha>0$ と $f\in L^2(D)$ に対して、

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (\alpha-\frac{1}{2}\Delta)u=f \\ u\in \mathcal{D}^1_{L^2}(D) \end{cases}$$

は一意的に解けるので、その解を $u\equiv G^0_\alpha f$ とおくと、$\{G^0_\alpha\,;\,\alpha>0\}$ は $L^2$-resolvent となっている, 即ち、

$$(1.2)\qquad \begin{cases} G^0_\alpha \text{ は 有界対称作用素 } (L^2(D)\text{上}) \\ G^0_\alpha - G^0_\beta + (\alpha-\beta)G^0_\alpha G^0_\beta = 0 \end{cases}$$

確率論の側面からみると、$G^0_\alpha$ は、吸収壁ブラウン運動の $\alpha$ 次の Green 作用素と一致している。

そこで、境界があったときに考えられるDynkinの公式を想定して、次の問題を考えよう。

**問題**

$L^2$-resolvent $\{G_\alpha;\ \alpha>0\}$ で、

$$
(1.3)\begin{cases}
\text{(i)} & \alpha G_\alpha 1 = 1 \\
\text{(ii)} & R_\alpha \equiv G_\alpha - G_\alpha^0 \text{ とおくとき、} \\
 & L^2(D) \ni f \geq 0 \Rightarrow R_\alpha f \geq 0 \\
\text{(iii)} & (\alpha - \frac{1}{2}\Delta) R_\alpha f = 0
\end{cases}
$$

を満たすものをすべて求めよ。

この問題を完全に解いたのは、福島正俊氏であり、彼は、$L^2$-resolvent $\{G_\alpha;\ \alpha>0\}$ と 1:1 に対応する $L^2$-Dirichlet space $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ を解析するために、$D$ の Martin 境界 $M$ 上の $L^2$-Dirichlet space $(\mathcal{F}_M, \mathcal{E}_M)$ を導入して、次の条件をみたすものをすべて求めることであると主張した。

**問題** $(\mathcal{F}_M, \mathcal{E}_M)$ は $L^2$-Dirichlet spaceで

$$
(1.4)\begin{cases}
\text{(i)} & 1 \in \mathcal{F}_M \subset H_M \\
\text{(ii)} & \mathcal{E}_M = \mathbb{D} + N,\ N \text{ は non-negative} \\
 & \text{symmetric bilinear form で、} N(1,1) = 0 \\
\text{(iii)} & \varphi \in \mathcal{F}_M \Rightarrow N((\varphi \vee 0)\wedge 1, (\varphi \vee 0)\wedge 1) \leq N(\varphi, \varphi)
\end{cases}
$$

を満たすものをすべて求めよ。

そこで、$(\mathbb{H}_M, \mathbb{D})$ は次に定義される $L^2$ — Dirichlet space である；$\mu$ を $M$ 上の調和測度とし、$U_\alpha(\xi, \eta)$ を Feller 核とするとき、

$$
(1.5)\quad \begin{cases} \mu' \equiv U_1 1 \cdot \mu \\ \mathbb{D}(\varphi, \varphi) \equiv \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M\int_M (\varphi(\xi)-\varphi(\eta))^2 U(\xi,\eta)\, d\mu\, d\mu \\ \mathbb{H}_M \equiv \{ \varphi \in L^2(M; d\mu') ;\ \mathbb{D}(\varphi, \varphi) < \infty \}. \end{cases}
$$

福島氏の主要な部分は、(1.4) の (iii)、即ち、"bilinear form $N$ に normal contraction が作用する" ことの部分であり、このことの証明のために、$\widehat{BLD}$-harmonic function に関する詳しい結果（Doob の定理）を full に用いた。

そこで、我々は考えた。初めから、境界の滑らかさを仮定しないのであるなら、Martin 境界も必要ないのではないだろうか？ そのことは、福島氏の論文にある定理5.1にある考えを、始めに注意することにより、ある段階までは、境界のことを使うことなく、実際示される。この報告では、上述のことを実行し、その系として、福島氏の $N$ の性質 (1.4) (iii) がでてくることを話したいと思う。

## §2. 双一次形式 N

吸収壁ブラウン運動の resolvent $\{G_\alpha^0 ; \alpha > 0\}$ に対応する $L^2$-Dirichlet space を $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ としよう。(1.1) より、

$$(2.1) \quad \begin{cases} \mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{D}_{L^2}^1(D) \\ \mathcal{E}^{(0)}(u,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。

(1.3) を満たすものとして、福島氏が構成した反射壁ブラウン運動の resolvent $\{G_\alpha^\infty ; \alpha > 0\}$ があり、それに対応する $L^2$-Dirichlet space を $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ とするとき、

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathcal{F}^{(\infty)} = \mathcal{E}_{L^2}^1(D) \\ \mathcal{E}^{(\infty)}(u,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \end{cases}$$

が成り立つ。実は、この (2.2) を通して、反射壁ブラウン運動が構成されたのであった。

従って、(2.1) と (2.2) より、

$$(2.3) \quad \begin{cases} (\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)}) \subset (\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)}) \\ \mathcal{E}^{(\infty)}|_{\mathcal{F}^{(0)} \times \mathcal{F}^{(0)}} = \mathcal{E}^{(0)} \end{cases}$$

が成り立つ。

次に、(2.3) なる関係が (1.3) を満たす $L^2$-resolvent $\{G_\alpha ; \alpha>0\}$ に対応する $L^2$-Dirichlet space $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ に対しても成り立つことを示そう。

<u>定理 2.1</u>

$$\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}$$
$$\mathcal{E}|_{\mathcal{F}^{(0)}\times\mathcal{F}^{(0)}} = \mathcal{E}^{(0)}$$

<u>証明</u> (第一段) $\forall u \in C_0^\infty(D)$ に対して、(1.3) より、

(2.4) $$\alpha(u-\alpha G_\alpha u) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} -\frac{1}{2}\Delta u \quad \text{in } \mathcal{D}(D)'$$

が成り立つことに注意すると、(2.1) より、

$$\exists \lim_{\alpha\to\infty} \alpha((u-\alpha G_\alpha u), u)_D =$$
$$= -\frac{1}{2}(\Delta u, u)_D =$$
$$= \mathcal{E}^{(0)}(u,u)$$

従って、$(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ の定義より、$u \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}^{(0)}(u,u)$ が成り立つ。

(第二段) (2.1) より、$C_0^\infty(D)$ は $\mathcal{F}^{(0)}$ の中で dense ゆえ、$\forall u \in \mathcal{F}^{(0)}$ に対して、$\exists (u_n)_1^\infty$ in $C_0^\infty(D)$ ∋ $\mathcal{E}^{(0)}(u_n-u, u_n-u) \to 0$. 従って特に、$\mathcal{E}^{(0)}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$ が成り立つから、(第一段) より、$(u_n)_1^\infty$ in $\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$. 一方 Poincaré の不等式より、$u_n \to u$ in $L^2(D)$ が成り立つことに注意すると、$(u_n)_1^\infty$ は $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ の基本列になるので、$L^2$-Dirichlet space の性質より、$(u_n)_1^\infty$ は $\mathcal{F}$ の中で $\mathcal{E}$ の norm で

収束するが、その極限が $u$ であることは明らかであるので、$u \in \mathcal{F}$ が従い、$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(0)}(u_n, u_n) = \mathcal{E}^{(0)}(u,u). \qquad (\text{Q.E.D})$$

次に、$(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ と $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ との関係を調べるために、次の直和分解を考えよう。

$$(2.5) \quad \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{H}_\alpha & (\mathcal{E}_\alpha \equiv \mathcal{E} + \alpha(\ ,\ )_D \text{ に関して}) \\ \mathcal{F}^{(\infty)} = \mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{H}_\alpha^{(\infty)} & (\mathcal{E}_\alpha^{(\infty)} \equiv \mathcal{E}^{(\infty)} + \alpha(\ ,\ )_D \text{ に関して}) \end{cases}$$

これは、(2.3) と定理 2.1 より可能で、(1.3) より、

$$(2.6) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_\alpha = \{u \in \mathcal{F};\ (\alpha - \tfrac{1}{2}\Delta)u = 0\} \\ \mathcal{H}_\alpha^{(\infty)} = \{u \in \mathcal{F}^{(\infty)};\ (\alpha - \tfrac{1}{2}\Delta)u = 0\} \end{cases}$$

が成り立つ。従って、

$$(2.7) \quad \mathcal{H}_\alpha \cup \mathcal{H}_\alpha^{(\infty)} \subset C^\infty(D)$$

が成り立つことに注意しておく。

<u>補題 2.1.</u> $\mathcal{F} \cap C^\infty(D) \cap B(D) \ni u$ に対して、

$$(2.8) \quad \mathcal{E}(u,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx + \lim_{m\to\infty} \lim_{\alpha\to\infty} \alpha(1-\varphi_m, f_\alpha)_D,$$

そこで、 $0 \le \underset{C_0^\infty(D)}{\underset{\cap}{\varphi_m}} \uparrow 1$ (各点収束)、

$$f_\alpha \equiv 2\alpha u(u-\alpha G_\alpha u) - \alpha(u^2 - \alpha G_\alpha u^2)$$

証明.　$(\mathcal{F}, \mathcal{E})$の定義より、

(2.9)　$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha(u-\alpha G_\alpha u, u)_D$.

一方、　各$\alpha > 0$に対して、

(2.10)　$\alpha(u-\alpha G_\alpha u, u)_D = \frac{1}{2}\int_D f_\alpha(x)dx$

に注意すると、　各$m$に対して、

(2.11)　$\alpha(u-\alpha G_\alpha u, u)_D = \frac{1}{2}(f_\alpha, \varphi_m)_D + \frac{1}{2}(f_\alpha, 1-\varphi_m)_D$.

才一項について考えると、　(1.3)より、

$u, u^2 \in L^1(D)$に注意して、

$$\alpha(u-\alpha G_\alpha u) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} -\frac{1}{2}\Delta u \quad \text{in } \mathcal{D}(D)'$$

$$\alpha(u^2-\alpha G_\alpha u^2) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} -\frac{1}{2}\Delta u \quad \text{in } \mathcal{D}(D)'$$

が成り立つので、　$u\cdot\varphi_m \in C_0^\infty(D)$ ゆえ、

$$\exists \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2}(f_\alpha, \varphi_m)_D =$$

$$= -\frac{1}{2}(\varphi_m u, \Delta u)_D + \frac{1}{4}(\varphi_m, \Delta u^2)_D =$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \varphi_m(x)\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2\Big)dx$$

従って、

(2.12)　$\exists \lim_{m\to\infty}\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2}(f_\alpha, \varphi_m)_D =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 dx$$

故に、(2.9), (2.10), (2.11), (2.12) より (2.8)が従う. (Q.E.D)

<u>定理 2.2.</u> $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{(\infty)}$

$$\mathcal{E}(u,u) \geq \mathcal{E}^{(\infty)}(u,u) \quad (u \in \mathcal{F})$$

<u>証明</u> (第一段) $\forall f \in B(D)$ (bdd. m'ble) に対して、$u \equiv R_\alpha f$ $(\alpha>0)$ を考えると、(1.3), (2.7) より、$u \in C^{\infty}(D) \cap B(D)$ が成り立つので、定理 2.1 と (2.5) より、$u \in \mathcal{F}$ 従って (2.2), (2.8) より、$u \in \mathcal{F}^{(\infty)}$ が従い、$\mathcal{E}(u,u) \geq \mathcal{E}^{(\infty)}(u,u)$ が成り立つ。何故なら、(1.3) より、

$$f_\alpha(x) = \alpha G_\alpha((u-u(x))^2) \geq 0$$

が成り立つからである。

(第二段) (1.3) より $R_\alpha(C_0^\infty(D))$ dense in $(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)$
($\because$ $\mathcal{H}_\alpha \ni u$, $0 = \mathcal{E}^\alpha(u, R_\alpha\varphi)$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(D)$ とすると、
$0 = \mathcal{E}^\alpha(u, G_\alpha\varphi) = (u,\varphi)$ $\therefore$ $u=0$)
であるから、定理 2.1, (2.5) に注意することによって、定理 2.2 が得られる. (Q.E.D.)

次に、定理 2.2 より、

(2.13) $\quad N(u,v) \equiv \mathcal{E}(u,v) - \mathcal{E}^{(\infty)}(u,v) \quad (u,v \in \mathcal{F})$

が定義可能であるが、定理 2.1, 2.2 より 次のことが成り立つことは明らかである.

<u>定理 2.3.</u> (1) $N$ は non-negative symmetric bilinear form である.

(2) $N(u,u)=0 \qquad (\forall u \in \mathcal{F}^{(0)})$.

最後に、我々の目的であった次のことを示そう.

<u>定理2.4</u> $u \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \quad N((u\vee 0)\wedge 1, (u\vee 0)\wedge 1) \leq N(u,u)$$

<u>証明</u> $v \equiv (u\vee 0)\wedge 1$ とおく.

$u_n \equiv (u\vee(-n))\wedge n$, $v_n \equiv (v\vee(-n))\wedge n$ とおくと、

$L^2$-Dirichlet space の一般論より、

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}(u_n,u_n) = \mathcal{E}(u,u),\ \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}(v_n,v_n) = \mathcal{E}(v,v)、$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}^{(\infty)}(u_n,u_n) = \mathcal{E}^{(\infty)}(u,u),\ \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}^{(\infty)}(v_n,v_n) = \mathcal{E}^{(\infty)}(v,v)$$

が成り立つので、各$n$に対して、

(2.14) $\qquad N(v_n,v_n) \leq N(u_n,u_n)$

が示されれば、(2.13)より $N(v,v) \leq N(u,u)$

が成り立つ. 従って、始めから、$u$は bdd. としてよい.

さらに、定理2.3(2)より、$N(u,u), N(v,v)$は、$u, v$の $\alpha$-harmonic part のみによるし、$u, v$の $\alpha$-harmonic part を $u_\alpha, v_\alpha$ とするとき、$|v(x)-v(y)| \leq |u(x)-u(y)|$ より $|v_\alpha(x)-v_\alpha(y)| \leq |u_\alpha(x)-u_\alpha(y)|$ が成り立つことに注意すると共に、(2.7)より $u_\alpha, v_\alpha \in \mathcal{F}\cap C^\infty(D)\cap \mathcal{B}(D)$ であるから、補題2.1 が適用できて、(2.14)は、(2.2), (2.8), (2.13)

より従う。 (Q.E.D)

## 参考文献

Masatoshi Fukushima : On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities.
J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 58 − 93.