数理解析研究所講究録
第 112 巻 1971 年 193-199

連続相空間上の分枝過程の固有値問題について

佐賀大 理工 小倉幸雄

$\boxed{1}$ 連続相空間上の分枝過程とは $\mathbb{R}_+^d$ 1) ($d \geq 1$) 上の Markov 過程 $X = (x_t, P_x)$ であって，任意の $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ に対し $\psi_t(\lambda) \geq 0$ が存在して

(1.1) $\quad E_x[e^{-\lambda \cdot x_t}] = e^{-x \cdot \psi_t(\lambda)}, \qquad x \in \mathbb{R}_+^d$

をみたすものを言う。以後 X をそのような確率過程とし，更に

<u>仮定</u>　X は確率連続である．

とする．このとき $\psi_t(\lambda)$ は微分可能で，X の生成作用素 $\mathfrak{G}$ は，空間 $\mathbb{C}_0^2(\mathbb{R}_+^d)$ 2) を定義域に含み，任意の $f \in \mathbb{C}_0^2(\mathbb{R}_+^d)$ に対し，

(1.2) $\quad \mathfrak{G} f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) + \sum_{i,j=1}^{d} x_i b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$

---

1) $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とする．

2) $\mathbb{C}_0 = \{ f(x) ;\ f(x)$ は $\mathbb{R}_+^d$ 上で連続かつ $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \}$

$\mathbb{C}_0^2 = \{ f \in \mathbb{C}_0 ;\ f(x)$ は 2 回微分可能で，それが $\mathbb{C}_0$ に入る $\}$

である．

$$+\sum_{i=1}^{d} x_i \int_{|y|\leq 1} \left(f(x+y) - f(x) - y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) n_i(dy),$$

但し，$a_i \geqq 0$，b_{ij}は実定数，$n_i(dy)$は$\int_{|y|\leq 1}(y_i^2 + \sum_{j\neq i} y_j)n_i(dy)$

$+\int_{|y|>1} n_i(dy) < \infty$，をみたす$\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$上の測度，

という形をもつことが知られている（S. Watanabe [5]）。

(1.3) $\qquad h^{(i)}(\lambda) = -e^{\lambda_i} \mathcal{G} f_\lambda(e_i)$ 3)， $\qquad i=1,2,\cdots,d$

とすれば (1.1) ~~(1.2)~~ より明らかに

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi_t^{(i)}(\lambda)}{dt} = h^{(i)}(\psi_t(\lambda)), \\ \psi_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i, \text{ 4)} \end{cases}$$

(cf. S. Watanabe [5]).

$\boxed{2}$ 我々の目的は連続相空間上の分枝過程の半群の固有関数展開であるが，この種の問題は S. Karlin と J. McGregor [1] [2] によって初めて扱かわれた。即ち彼等は，$d=1$ で相空間として$\mathbb{R}_+$の代わりに非負の整数全体$\mathbb{Z}_+$をとったとき（このとき対応する Markov 過程を1次元 Galton-Watson process という）適当なヒルベルト空間を導入することにより，殆んど完璧な結果を出している。続いて報告者[3]が$\mathbb{Z}_+^d$ $(d \geqq 1)$を相空間にしたとき

3) $f_\lambda(x) = e^{-\lambda \cdot x}$，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$，$e_i = (0, \cdot\cdot, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdot\cdot, 0)$ とする。

4) $\psi_t(\lambda) = (\psi_t^{(1)}(\lambda), \cdots, \psi_t^{(d)}(\lambda))$ とした。

（対応する確率過程は多次元 Galton-Watson process と呼ばれる）で，離散スペクトルのみが現われる場合を計算した．（S. Karlin と J. McGregor も独立に結果を得ているらしいが，未だ印刷物として発表されてはいない ― 少なくとも日本には届いていない。）蛇足をつけ加えることを許して貰えば，この場合の主たる困難さは固有値が単純とは限らず一般化された固有関数を用いなければならない点にある。

問題を離散スペクトルのみが現われる場合に限定して考えると，上記の結果は何れもヒルベルト空間を旨くとることにより半群に付随した作用素がその上で完全連続になることを本質的に用いている。しかし相空間を連続にすると，その完全連続性の証明が困難になる ― 少なくとも報告者はその証明を知らない。それでも 1 次元の場合は不変測度が計算出来ることを利用して，展開定理が得られている（報告者[4]）。ここでは相空間を多次元連続にしたときの一つの接近法を与える。

$\boxed{3}$ 半群の一般化された右側固有関数，即ち

(3.1) $$(T_t - e^{\mu t} I)^n \varphi(x) = 0, \qquad \text{for some } n,$$

となる $\varphi(x)$ を十分沢山（固有関数展開に必要だと思われるだ

り）求めるのは[1]及び[3]の方法で行えば難しくはない。しかし半群が対称化不可能であるため，これから直ちに展開が出るという訳には行かない。（左側）固有測度とでも呼ぶべきもの，即ち

$$(3.2)\qquad \int_{\mathbb{R}_+^d} \xi(dx) P_t(x, dy) = e^{\mu t} \xi(dy)$$

をみたす符号付測度 $\xi(dx)$ を求めなければならない。発見的考察として，$\xi(dx)$ のラプラス変換 $\hat{\xi}(\lambda)$ が存在すると仮定して，(3.2) のラプラス変換をとれば (1.1) より

$$(3.3)\qquad \hat{\xi}(\psi_t(\lambda)) = e^{\mu t} \hat{\xi}(\lambda)$$

を得る。これを $t=0$ で t に関して微分すれば

$$(3.4)\qquad \sum_{i=1}^{d} h^{(i)}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \hat{\xi}(\lambda) = \mu \hat{\xi}(\lambda)$$

となる。即ち (3.2) の $\xi(dx)$ を求める問題は，線型微分作用素

$$(3.5)\qquad D = \sum_{i=1}^{d} h^{(i)}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$$

の固有値問題に帰着されるのである。

$\boxed{4}$ ここで作用素 D に要求される性質をみるために，分枝過程論の結果もしくは当然予想される結果を二三述べる。先ず

平均行列の生成行列を

$$(4.1)\qquad M=\left[\frac{\partial h^{(i)}}{\partial\lambda_j}(0)\right]_{i,j=1,2,\cdots,d}$$ [5)]

とし，これが既約であるとする。このとき特殊な場合を除いてMの実部最大の特性値ρは唯一つでそれは実数で単純である。

__命題__ 1) $\rho>0$ ならば $\gamma>0$ [6)] が存在して

$$(4.2)\qquad \lim_{t\to\infty}\psi_t(\lambda)=\gamma, \qquad \lambda\in\mathbb{R}_+^d\setminus\{0\}.$$

更にγは$h^{(i)}(\lambda)$の$\mathbb{R}_+^d\setminus\{0\}$の中の唯一つの共通の零点で，行列

$$(4.3)\qquad G=\left[\frac{\partial h^{(i)}}{\partial\lambda_j}(\gamma)\right]_{i,j=1,\cdots,d}$$

の実部最大の特性値σは唯一つでそれは実数で単純であり，

$$(4.4)\qquad \sigma<0$$

をみたす。

2) $\rho\leq 0$ ならば

---

5) 厳密にはこの微分が存在しないことがある。その時には $\displaystyle\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\partial h^{(i)}}{\partial\lambda_j}(\lambda)$ で代用する。これが$+\infty$のときもあるが，その場合にも適当な修正を行なえば以下の議論はそのまゝ成立つ。尚 $\partial h^{(i)}(0)/\partial\lambda_j = dE_{e_i}[x_t\cdot e_j]/dt\,|_{t=0}$ である。

6) γの各成分が正という意味である。

$$(4.5)\qquad \lim_{t\to\infty} \psi_t(\lambda) = 0, \qquad\qquad \lambda\in\mathbb{R}^d_+ .$$

更に0は$h^{(i)}(\lambda)$の$\mathbb{R}^d_+$の中の唯一つの共通の零点である.

$\rho\leq 0$のとき$\gamma=0$とおくことにすれば, (4.2)は全てのρについて成立つことになる。更に$M=G$となり, 従って$\sigma=\rho$を得る. だから$\rho\neq 0$とすれば, (4.4)を仮定してよいことになる。次に$h^{(i)}(\lambda)$は$\mathbb{R}_d^+$の内部で解析的だから, $\gamma>0$のときは勿論γで解析的である. しかし$\gamma=0$のときはこれを仮定として入れなければならない。

<u>仮定</u>　$h^{(i)}(\lambda)$はγで正則である.

$H(\gamma)$をγにおける解析関数の芽とする。このとき上の仮定から(3.5)の作用素Dは$H(\gamma)$から$H(\gamma)$への線型作用素である. 我々はDを$H(\gamma)$上の作用素と考えて, その固有値問題を論ずる.

$\boxed{5}$ 3と4で要求された問題に対し次の形の解が得られる。

<u>定理</u>　$\gamma\in\mathbb{R}^d$とし, $h^{(i)}\in H(\gamma)$ $(i=1,2,\cdots,d)$が$h^{(i)}(\gamma)=0$をみたし, 更に行列$\left[\dfrac{\partial h^{(i)}(\gamma)}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{d}$の特性値$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_d$は複素平面$\mathbb{C}$の原点を頂点とする凸な錐形の内部に入るとする。そして$H(\gamma)$上の線型作用素Dを

(5.1) $$D = \sum_{i=1}^{d} h^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とすれば,

1) Dの固有値は $\{\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mu_i \,;\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d\}$ である。

2) μ_α に対応する一般化された固有空間[6]の次元は,集合 $\{\beta \in \mathbb{Z}_+^d ; \mu_\beta = \mu_\alpha\}$ の元の個数に等しい。もっと具体的に,各 μ_i に対応して $\partial u^{(i)}(\gamma)/\partial x_j = \delta_{ij}$ となる固有関数 $u^{(i)} \in H(\gamma)$ が存在して,更に μ_α に対応する固有空間は $\{u^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{d} \{u^{(i)}\}^{\beta_i} ; \mu_\beta = \mu_\alpha\}$ で張られる。

3) 2) の $\{u^{(\alpha)} ; \alpha \in \mathbb{Z}_+^d\}$ は次の意味で $H(\gamma)$ で完全である:

a) $\xi(x) \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \xi_\alpha x^\alpha \in \xi \in H(\gamma)$ に対し, $\sum_\alpha \xi_\alpha u^{(\alpha)} = 0$ ならば $\xi = 0$.

b) $\xi \in H(\gamma)$ に対し $\{\xi_\beta\}_{\beta \in \mathbb{Z}_+^d}$ が存在して, $\xi = \sum_\beta \xi_\beta u^{(\beta)}$.

文献

[1] Karlin, S. and J. McGregor, Z. Whar. 5 (1966) 1-33, 34-54

[2] —— ——, J. Math. Anal. Appl. 21 (1968) 485-495

[3] 小倉, Seminar on Probability 25 II (1967) 119-174 (和文)

[4] Ogura, Y., Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5 (1970) 423-441

[5] Watanabe, S., Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969) 447-466

6) $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\varphi \in H(\gamma) ; (D-\mu_\alpha)^n \varphi = 0\}$ を言う。以下,"一般化された"という言葉は省略する。