数理解析研究所講究録
第 112 巻 1971 年 200-210

分枝安定過程の爆発問題

東京工大　　志村道夫

§1. Introduction

$X=(W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x : x\in S)$ は第二可算性を持つ局所コンパクト・ハウスドルフ空間 S 上の第一種不連続性を持つ path からなる conservative な強マルコフ過程とする。$\{T_t\}_{t>0}$ を M.P. X の contraction semi-group とする。即ち,

$$T_t f(x) = E_x[f(x_t)] \quad : f\in \mathbb{B}(S), \text{ bdd. m'ble ft.}$$

また $k=k(x)$ を S 上の non-neg. m'ble ft. とし, M.P. X の $e^{-\int_0^t k(x_s)ds}$- subprocess を X^0 とする。M.P. X^0 の contraction semi-group を $\{T_t^0\}_{t>0}$ とする。即ち,

$$T_t^0 f(x) = E_x\left[e^{-\int_0^t k(x_s)ds} f(x_t)\right] \quad : f\in \mathbb{B}(S)$$

次に二つの積分方程式を考える。

$$(1) \qquad u(t,x) = T_t^0 f(x) + 2\int_0^t T_s^0\left[k(\cdot)\, u(t-s,\cdot)\right](x)\, ds$$

但し $t\geq 0$, $x\in S$, $f\in \mathbb{B}_+(S)$ non-neg. bdd. m'ble ft.

(2) $$u(t,x) = T_t^0 f(x) + \int_0^t T_s^0\left[k(\cdot)\,u(t-s,\cdot)^2\right](x)\,ds$$

$t \ge 0,\ x \in S,\ f$: m'ble ft. $0 \le f \le 1$

これら二つの方程式は次に述べる特別な分枝過程のそれぞれ平均個数の方程式，Skorohod equation であることは良く知られている。まず分枝過程に必要な記号の定義を与える。

S^n $(n=0,1,2,\cdots)$: symmetric direct product of S

特に $S^0=\{\partial\}$ とする。

$\mathbf{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$: topological sum

$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cup \{\Delta\}$: $\mathbf{S}$の一点コンパクト化

$\mathbb{B}^*(S)$ = S上の bdd. m'ble ft. で $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)| \le 1$

をみたす函数族。

$\mathbb{B}^*_+(S) = \mathbb{B}^*(S) \cap \{f : \text{non-neg. ft. on } S\}$ とする。

$\mathbf{X} = (\Omega, X_t, P_{\bar{x}} : \bar{x} \in \hat{\mathbf{S}})$ を次の性質を持つ分枝マルコフ過程

($\mathbf{X}$·1) $\mathbf{X}$ の non-branching part $\mathbf{X}^0$ は X^0と equivalent。

($\mathbf{X}$·2) $\mathbf{X}$ の branching law π は次のようなものである。 $\pi(x, A) = \delta_{[x,x]}(A)$ 但し $x \in S$, $A \in \mathcal{B}(\hat{\mathbf{S}})$.

operation "$\wedge$" "$\smile$"

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{x} = \partial \text{ or } \Delta \\ \prod_{j=1}^{n} f(x_j) & \text{if } \bar{x} = [x_1, \cdots, x_n] \in S^n \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$\check{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{x} = \partial \text{ or } \Delta \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j) & \text{if } \bar{x} = [x_1, \cdots, x_n] \in S^n \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

ここで"∧"と"∨"は m'ble ft. on S を m'ble ft. on $\hat{S}$ へ移す operation であることは明らか。

X を(X·1)(X·2)をみたす分枝過程(以後特に断わらない限りこの条件をみたすものとする)に対して

$$e(\bar{x}) \equiv P_{\bar{x}}(e_\Delta = \infty) \qquad \bar{x} \in \hat{S}$$

但し $e_\Delta(\omega) \equiv \inf\{t : X_t(\omega) = \Delta\}$ the explosion time

を定義する。このとき $e(\bar{x}) = \widehat{e|_S}(\bar{x})$ が成立するが、さらに $0 < e(x) \leq 1 \quad x \in S$ を仮定する時

$$H_t f(x) \equiv \frac{1}{e(x)} E_x[\hat{e}(X_t)\check{f}(X_t)] \qquad x \in S \qquad f \in B_+(S)$$

は次の2つの性質を持つ。(Sem. on prob. 分枝過程の基礎)

(3-1) $H_{t+s} f(x) = H_t H_s f(x) \qquad t, s \geq 0$

(3-2) $H_t f(x)$ は積分方程式(平均個数の方程式)

$$u(t,x) = \frac{1}{e(x)} T_t^0 (ef)(x) + \frac{2}{e(x)} \int_0^t T_s^0 [k(\cdot) u(t-s,\cdot)](x) ds$$

の解である。

時に(3.2)で $e\equiv 1$ とすれば(1)に帰着する。§2で実際 $e\equiv 1$ となる条件を与える。

次に $\forall f\in \mathbb{B}^*_+(S)$ に対して $\mathbb{T}_t\hat{f}(x)\equiv \mathbb{E}_x[\hat{f}(X_t)]$ $x\in S$ は(2)の min. sol. である。(Sem. on prob. 分枝過程の基礎) 特に $f\equiv 1$ とおけば $\mathbb{T}_t\hat{1}(x)=\mathbb{P}_x(e_\Delta>t)$ となるから、この時の non-neg. min. sol. が恒等的に1に等しいか否かでその分枝過程の爆発が有限時間内では発生しないか否かが決まる。

§2. 基本定理

定理1. 一般の分枝マルコフ過程において "Skorohod equation が $\forall f\in \mathbb{B}^*_+(S)$ なる初期値に対して $0\leq\cdot\leq 1$ をみたす唯一解を持つ"ことと "$\mathbb{P}_x(e_\Delta=\infty)\equiv 1$ on S (又は $\mathbb{P}_x(e_\Delta=\infty)\equiv 1$ on S) 即ち爆発が有限時間内には起らない" は同値である。

証明は Sem. on prob. 分枝過程の基礎の7章の議論から導かれるが詳細は略す。

定理2. 分枝過程 X は(※.1)(※.2)をみたすものとする。その時, $\exists t_0>0$ に対して $E_x[e^{\varphi t_0}]<+\infty$ on S が成立すれば, X の Skorohod equation (2)は $\forall f\in \mathbb{B}^*_+(S)$ なる初期値に

対して $0 \le \cdot \le 1$ をみたす唯一解を持つ。但し $\varphi_t(w) = \int_0^t k(x_s(w))\,ds$

(証明) 初期値 $f \in \mathbb{B}_+^*(S)$ に対する2つの解を $u(t,x)$, $v(t,x)$（$0 \le u, v \le 1$）とする。

$$u(t,x) - v(t,x) = \int_0^t T_s^0\left[k(\cdot)\left(u(t-s,\cdot)^2 - v(t-s,\cdot)^2\right)\right](x)\,ds$$

$$= \int_0^t T_s^0\left[k(\cdot)\left(u(t-s,\cdot) + v(t-s,\cdot)\right)\left(u(t-s,\cdot) - v(t-s,\cdot)\right)\right](x)\,ds$$

ここで $w(t,x) = |u(t,x) - v(t,x)|$ とおき，$|u(t,\cdot) + v(t,\cdot)| \le 2$ に注意すれば積分不等式

$$(4) \qquad w(t,x) \le 2\int_0^t T_s^0\left[k(\cdot)\,w(t-s,\cdot)\right](x)\,ds$$

を得る。ここで $0 \le w \le 1$ に注意すれば

$$w(t,x) \le 2\int_0^t T_s^0\left[k(\cdot)\right](x)\,ds = 2E_x\left[1 - e^{-\varphi_t}\right]$$

$$= 2E_x\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_t^j}{j!} \cdot e^{-\varphi_t}\right]$$

(4)をくり返し用いることにより

$$(5) \qquad w(t,x) \le 2^n E_x\left[\sum_{j=n}^{\infty} \frac{\varphi_t^j}{j!} e^{-\varphi_t}\right] \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

を得る（Sem. on prob. 分枝過程の諸問題）。

従って $t \le t_0$ で $E_x[e^{\varphi_t}] < +\infty$（$\varphi_t$ は $(\uparrow)$ in t）に注意して，${}^\forall t : 0 \le t \le t_0$ に対して

$$w(t,x) \le E_x\left[\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} e^{-\varphi_t}\right] \le E_x\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} e^{-\varphi_t}\right]$$

$$= E_x[e^{2\varphi_t}\cdot e^{-\varphi_t}] = E_x[e^{\varphi_t}] < +\infty$$

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(2\varphi_t)^j}{j!}e^{-\varphi_t} \to 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

$$\therefore\ E_x\Big[\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(2\varphi_t)^j}{j!}e^{-\varphi_t}\Big] \to 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

$\therefore$ $w(t,x)\equiv 0$ for $0\le {}^\forall t\le t_0$ 即ち $u(t,x)\equiv v(t,x)$ for $0\le {}^\forall t\le t_0$ $\le t_0$ となる。従って t_0 までの(2)の解は唯一であることがわかった。特に初期値 $f\equiv 1$ の場合，(2)の min. sol. $\underline{u}(t,x)$ は $\underline{u}(t,x) = \hat{T}_t\hat{1}(x) = P_x(e_\Delta > t)$ であるが，1 が(2)の解であること及び t_0 までは唯一の解しかないことから，$\underline{u}(t,x)$ $= P_x(e_\Delta > t)\equiv 1$ on S for $0\le {}^\forall t\le t_0$ を得る。さらに branching proprety より $P_{\hat{x}}(e_\Delta > t)\equiv 1$ on $\hat{S}$ for $0\le {}^\forall t\le t_0$ を得る。最後に分枝過程のマルコフ性から $P_{\hat{x}}(e_\Delta > t)\equiv 1$ on $\hat{S}$ for $0\le {}^\forall t$ を得る。従って $P_{\hat{x}}(e_\Delta = \infty)\equiv 1$ on $\hat{S}$ となり（爆発は起らない）定理1．より $0\le t<\infty$ における Skorohod equation (2) の解の唯一性がいえた。

§3．分枝定定過程の爆発

分枝過程 X の non-branching part X^0 が特に α 位の一次元対称定定過程 $(0<\alpha<2)$ の $e^{-\varphi_t}$- sub process に equivalent である場合について additive functional $\varphi_t = \int_0^t k(X_s)ds$ の non-neg. ft. k と $E_x[e^{\varphi_t}]$ の収束，発

散の関係を調べる。

定理3. $\varphi_t(w)=\int_0^t k(x_s(w))ds$ とする。このとき

(i) $k(x)=|x|^r \quad x\in R^1$, r : positive constant

$$\Rightarrow E_x[e^{\varphi_t}]\equiv +\infty \quad \text{for } {}^\forall t>0$$

(ii) $k(x)=\log(1+|x|^r) \quad x\in R^1 \quad r$: positive constant

$$\Rightarrow E_x[e^{\varphi_t}]<+\infty \quad \text{for } 0\le {}^\forall t<\frac{\alpha}{r}$$
$$\equiv +\infty \quad \text{for } \frac{\alpha}{r}<{}^\forall t$$

(iii) $k(x)=\log\{1+\log(1+|x|^r)\} \quad x\in R^1 \quad r$: positive constant

$$\Rightarrow E_x[e^{\varphi_t}]<+\infty \quad \text{for } 0\le {}^\forall t$$

(Remark) i)(ii)(iii) の結果と§2. の定理2. より(ii)と(iii)のcase については対応する分枝過程は爆発せず、$e(x)\equiv 1$ on $\mathcal{S}$ (or $e(\bar{x})\equiv 1$ on S) となる。従ってこの場合、§1 の積分方程式(1)は平均個数の方程式(3-2) に一致する。故にこの時, $f\in \mathbb{B}_+(\mathcal{S})$ (non-neg. bdd. m'ble ft) に対して $H_t f(x)=\mathbb{E}_x[\hat{f}(X_t)]$ は(1)の解である。この時 $H_t f(x)=E_x[e^{\varphi_t}f(x_t)]$ であることもわかる(Sem. on prob. 分枝過程の諸問題)。また定理2. より(ii)と(iii)のcase について Skorohod equation 式(2)は唯一解を持つことになる。

lemma. $p(t,x)$ を α 位の対称安定過程の密度函数 i.e. $p(t,x) = P_0(x_t \in dx)/dx$ とする。この時

(i) $\forall c>0$ に対して $p(t,x) = c^{\frac{1}{\alpha}} p(ct, c^{\frac{1}{\alpha}}x)$

(ii) $p(1,x) \sim \gamma \cdot |x|^{-1-\alpha} \quad (|x| \to \infty)$

但し γ は正の定数。 (Sem. on prob. 安定過程)

corollary. $E_x[|x_t|^\gamma] = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^\gamma p(t, x-y)\,dy$ について

$$E_x[|x_t|^\gamma] \quad < +\infty \quad \text{for } 0 \le \gamma < \alpha$$
$$= +\infty \quad \text{for } \alpha \le \gamma$$

(定理3の証明) 安定過程の性質より $E_0[e^{\varphi_t}]$ の収束, 発散をいえば十分である。簡単の為, E_0 を E, P_0 を P と書く。

(i) について

$$e^{\varphi_t(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi_t(w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{n-1}}^t ds_n$$
$$\times |x_{s_1}(w)|^\gamma |x_{s_2}(w)|^\gamma \cdots |x_{s_n}(w)|^\gamma$$

ここで N を $N\gamma \ge \alpha$ をみたす自然数と取れば

$$E[e^{\varphi_t}] \ge E\left[\int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N\, |x_{s_1}|^\gamma |x_{s_2}|^\gamma \cdots |x_{s_N}|^\gamma\right]$$
$$= \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N\, E\Big[|x_{s_1}|^\gamma |x_{s_1} + (x_2 - x_1)|^\gamma \cdots |x_{s_1} + (x_{s_2} - x_{s_1})$$
$$+ \cdots + (x_{s_N} - x_{s_{N-1}})|^\gamma\Big]$$
$$= \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1|^\gamma |y_1 + y_2|^\gamma \cdots |y_1 + y_2 + \cdots + y_N|^\gamma$$

$$\times\, p(s_1,y_1)dy_1\, p(s_2-s_1,y_2)dy_2 \cdots p(s_N-s_{N-1},y_N)dy_N$$

$$= \int_0^t ds_1 \cdots \int_{s_{N-1}}^t ds_N \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2\, p(s_2-s_1,y_2) \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_N\, p(s_N-s_{N-1}, y_N)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1|^\gamma \cdot |y_1+y_2|^\gamma \times \cdots \times |y_1+y_2+\cdots+y_N|^\gamma\, p(s_1,y_1)dy_1$$

最後の項の最後の積分は被積分函数が$\sim |y|^{N\gamma} \gtrsim |y|^\alpha$なので corollaryより発散する。故に$E[e^{\varphi_t}]=+\infty$を得る。

(ii)について　$0<t<\frac{\alpha}{\gamma}$とする。

$$E[e^{\varphi_t}] = E\left[e^{t\int_0^t \log(1+|x_s|^\gamma)\frac{ds}{t}}\right]$$

$$\le E\left[\int_0^t \frac{ds}{t} e^{t\log(1+|x_s|^\gamma)}\right] \quad (\text{イェンゼンの不等式})$$

$$= E\left[\int_0^t \frac{ds}{t}(1+|x_s|^\gamma)^t\right] = \int_0^t \frac{ds}{t} E\left[(1+|x_s|^\gamma)^t\right]$$

$$= \int_0^t \frac{ds}{t} E\left[(1+|s^{\frac{1}{\alpha}}x_1|^\gamma)^t\right] \qquad (x_s \simeq s^{\frac{1}{\alpha}}x_1)$$

$$\sim \int_0^t \frac{ds}{t} s^{\frac{\gamma t}{\alpha}} E\left[|x_1|^{\gamma t}\right] = \frac{t^{\frac{\gamma t}{\alpha}}}{\frac{\gamma t}{\alpha}+1} E\left[|x_1|^{\gamma t}\right]$$

$\therefore$ $0\le t<\frac{\alpha}{\gamma}$のとき，$\gamma t<\alpha$だから corollaryより

$E[e^{\varphi_t}]<+\infty$。

$\frac{\alpha}{\gamma}<t$の場合。$\forall$自然数Nについて，$\gamma N t=\alpha$をみたすようtを固定する。

$$E\left[e^{\int_0^{(N+1)t}\log(1+|x_s|^\gamma)ds}\right]$$

$$= E\left[e^{\int_0^t \log(1+|x_s|^\gamma)ds}\, e^{\int_0^{Nt}\log(1+|x_s(w_t^+)|^\gamma)ds}\right]$$

$$\geq E\left[E_{x_t}\left[e^{\int_0^{Nt}\log(1+|x_s|^\gamma)ds}\right]\right]$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} E\left[n \leq x_t < n+1 \,;\, E_{x_t}\left[e^{\int_0^{Nt}\log(1+|x_s|^\gamma)ds} \,;\, \sup_{0\leq s\leq Nt}|x_s-x_0| \leq 1\right]\right]$$

$$\geq a\sum_{n=1}^{\infty} P(n\leq x_t<n+1)\, e^{Nt\log(1+|n-1|^\gamma)}$$

但しここで a は $P_x(\sup_{0\leq s\leq Nt}|x_t-x|\leq 1)$ に等しい正数で安定過程の性質より x によらない。さらに $Nt=\frac{\alpha}{\gamma}$ であるから N にもよらない。従って上の不等式は次に続き，

$$= a\sum_{n=1}^{\infty}(1+|n-1|^\gamma)^{Nt}\, P(nt^{-\frac{1}{\alpha}}\leq x_1<(n+1)t^{-\frac{1}{\alpha}})$$

$$> a\sum_{n=M}^{\infty}(1+(n-1)^\gamma)^{Nt}\int_{nt^{-\frac{1}{\alpha}}}^{(n+1)t^{-\frac{1}{\alpha}}} x^{-1-\alpha}\,dx$$

(但し M は lemma の(ii)の漸近式が成立する十分大きな自然数)

$$= \text{const.}\times\sum_{n=M}^{\infty}\frac{(1+(n-1)^\gamma)^{Nt}}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{n+1} \qquad (\text{const.}>0)$$

$\gamma Nt=\alpha$ で $\frac{(1+(n-1)^\gamma)^{Nt}}{(n+1)^\alpha}\sim 1$ だから最後の級数は発散する。従って $\cancel{E[e^{\int_0^{(N+1)t}\log(1+}}$

$$E\left[e^{\int_0^{(N+1)t}\log(1+|x_s|^\gamma)ds}\right]=E\left[e^{\int_0^{\frac{\alpha}{\gamma}(1+\frac{1}{N})}\log(1+|x_s|^\gamma)ds}\right]=+\infty$$

ここで N は $\forall$自然数でかつ $\varphi_t\in(\uparrow)$ in t だから $\forall t>\frac{\alpha}{\gamma}$ に対して $E[e^{\varphi_t}]=+\infty$ を得る。

(iii)について。(ii)の前半の証明と全く同様に証明できるので省略する。

— 証明終り —

今後の問題として，Ito-Mckean [1] の場合にならって定理3の(i)の case について分枝過程の爆発が証明できないかということである。

参考文献

[1] K. Ito　H.P. Mckean Jr.
Diffusion Processes and Their Sample Paths

[2] 池田・長沢・渡辺
分枝マルコフ過程の基礎　Sem. on prob.

[3] 河野他
分枝マルコフ過程の諸問題　Sem. on prob.

[4] 竹内・山田・渡辺
安定過程　Sem. on prob.