数理解析研究所講究録
第113巻 1971年 150-161

非鞍状不変集合について

東大 教養 齋藤 利弥

§1. 定義と仮定といくつかの定理.

(X, π): X を phase space, π を phase map とする力学系.

M: 力学系 (X, π) の compact invariant set.

$C^+(x)$: $x \in X$ から出発する positive semi-orbit.

$C^-(x)$: $x \in X$ から出発する negative semi-orbit.

$C(x)$: $C^+(x) \cup C^-(x)$.

$L^+(x)$: x の ω-limit set.

$L^-(x)$: x の α-limit set.

$D^+(x)$: x の positive prolongation.

$D^-(x)$: x の negative prolongation.

$J^+(x)$: x の positive prolongational limit set.

$J^-(x)$: x の negative prolongational limit set.

M をこの力学系の空でない non-open compact invariant set とし, U を M の近傍とするとき, 次のような $\overline{U} - M$ の部分集合を考える.

$$G_U = [x;\ x \in \bar{U} - M,\ C^+(x) \not\subset \bar{U},\ C^-(x) \not\subset \bar{U}],$$
$$N_U^+ = [x;\ x \in \bar{U} - M,\ C^+(x) \subset \bar{U}],$$
$$N_U^- = [x;\ x \in \bar{U} - M,\ C^-(x) \subset \bar{U}],$$
$$N_U = N_U^+ \cap N_U^- .$$

G_U の各連結成分を hyperbolic region,

$N_U^+ - N_U$ の各連結成分を positive parabolic region,

$N_U^- - N_U$ の各連結成分を negative parabolic region,

N_U の各連結成分を elliptic region という。

今後，X は locally compact metric space とし，したがって特にことわらなくとも M の近傍 U としては $\bar{U}$ が compact なもののみを考えることにする。

定義 1. ある近傍 U に対して（または，任意に小さいすべての近傍 U に対して — といっても同じ）$\overline{G_U} \cap M \neq \phi$ であるとき，M は鞍状集合（saddle set）であるという。

次の二つの定理はしばしば利用される。（証明は [1]）

定理 1. M が non-saddle ならば

$$L^+(x) \cap M \neq \phi,\ x \notin M \Rightarrow M \supset J^+(x) \supset L^+(x),$$
$$L^-(x) \cap M \neq \phi,\ x \notin M \Rightarrow M \supset J^-(x) \supset L^-(x).$$

定理 2. M が正に漸近安定である必要十分条件は，ある近傍 U に対して（または，十分小さいすべての近傍 U に対して — といっても同じ）$N_U^- = \phi$ となることである。（証明は [1]）

今後はMに対し次の仮定をおく．

(I) Mはnon-saddleである．

(II) Mはminimal setsから孤立している，すなわちMの近傍Uで，$U-M$がminimal setsを含まないものが存在する．

(III) Mの基本近傍系で，その任意のメンバーUに対し，$U-M$が連結であるようなものが存在する．

以上の仮定の下でMの近傍での軌道の行動をしらべる．

§2．可能な場合の分類

<u>定理3</u>．Mの基本近傍系で(III)を満足し，しかもそれの任意のメンバーUに対しつねに$G_U=\phi$であるようなものが存在する．

<u>証明</u>　Mがnon-saddleであるからVをMの~~任意~~十分小さい近傍とすれば，$G_U \cap V=\phi$．ゆえに$U-G_U=U'$はMの近傍であって，明らかに$G_{U'}=\phi$．

$U'-M$が連結でないときは，それの連結成分を$A_1, A_2, \cdots$とする．Vとして(III)の性質をもつ基本近傍系のメンバーをとっておき，$A_k \cap V = A_k \cap (V-M) = B_k$とおけば

$$V-M=\bigcup B_k, \quad B_j \cap B_k=\phi \quad \text{for } j \neq k.$$

$V-M$の連結性から，B_kのうち空でないのはただ一つ，たとえばB_1で，$A_1 \cup M \supset B_1 \cup M = (V-M) \cup M = V$．ゆえに$A_1 \cup M$

$=U_1$ とおけば，$G_{U_1}=\phi$ で $U_1-M=A_1$ は連結である．任意の近傍 U の中にこのような近傍 U_1 が含まれるから，これらは基本近傍系をなす（証明終）．

今後はこのような性質をもつ基本近傍系のメンバーのみを M の近傍としてとる．さらに (II) により，これらの近傍は M の外には minimal set を含まないと仮定してよい．

$G_U=\phi$ であるから $\bar{U}-M=N_U^+\cup N_U^-$ で，N_U^+, N_U^- は $\bar{U}-M$ において閉じており，$\bar{U}-M$ が連結であるから，次の三つの場合だけが可能である．

(1) $N_U^+=\bar{U}-M$, $N_U^-=\phi$,

(2) $N_U^-=\bar{U}-M$, $N_U^+=\phi$.

(3) $N_U^+\neq\phi$, $N_U^-\neq\phi$, $N_U\neq\phi$.

定理2により (1), (2) の場合は M は漸近安定である．したがって問題が残るのは (3) の場合だけである．

§3. (3) の場合: parabolic region

<u>補題1</u>. N_U の近傍 W で，$y\in W$ ならば $\cancel{L^+(y)\subset M}$ $\phi\neq L^+(y)\subset M$, $\phi\neq L^-(y)\subset M$ となるようなものが存在する．

<u>証明</u> $x\in N_U$ とし，点列 $\{x_n\}$ で $x_n\to x$, $L^+(x_n)\not\subset M$ または $L^+(x_n)=\phi$ であるようなものが存在したとする．

もし $L^+(x_n)=\phi$ ならば，十分大きい t に対して $\pi(x_n,t)\notin\bar{U}$

となる。

$L^+(x_n) \neq \phi$, $L^+(x_n) \not\subset M$ のときは，まず $L^+(x_n) \cap M \neq \phi$ となることはあり得ない。なぜなら (I) と定理1とから，$L^+(x_n) \cap M \neq \phi$ は $L^+(x_n) \supset M$ を意味するからである。ゆえに $L^+(x_n) \cap M = \phi$。ところがもし $L^+(x_n) \subset \overline{U}$ であると $L^+(x_n)$ は compact invariant set で，したがって minimal set を含む。ところが $\overline{U} - M$ は minimal set を含まないからこれは不可能。ゆえに $L^+(x_n) \not\subset \overline{U}$.

ゆえにいずれにせよ $t_n \to \infty$ となるような $t_n > 0$ で

$$\pi(x_n, t_n) \in X - \overline{U}$$

となるものが存在する。

X の one-point compactification を $\tilde{X}$ とし，(X, π) の $\tilde{X}$ への自然な拡張を $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ とする。すると $\tilde{X}$ は compact であるから $\{\tilde{\pi}(x_n, t_n)\} = \{\pi(x_n, t_n)\}$ は $\tilde{X} - U$ に集積点 u をもつ。$x_n \to x$, $t_n \to \infty$ であるから $u \in \tilde{J}^+(x)$。すなわち $\tilde{J}^+(x) \not\subset M$。ただし $\tilde{J}^+$ は，力学系 $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ に関する x の prolongational limit set である。一方 $x \in N_U$ であるから $L^+(x) \subset \overline{U}$，したがって $L^+(x) \cap M \neq \phi$。ゆえに定理1から，M は $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ の saddle set である。ところが saddle set という性質は M の近傍での解の行動によって定義されているのであるから，M は (X, π) においても saddle でなければならず，(I) と矛盾する。ゆえに y が N_U に十分近ければ，$L^+(y) \neq \phi$, $L^+(y) \subset M$ でなければならない。$L^-(y)$ に

ついても証明は同じである（証明終）.

補題2. Uが十分小さければ $N_U^+ \neq N_U$, $N_U^- \neq N_U$.

証明 まず $N_U^+ = N_U$ として矛盾を導く.

$N_U^+ = N_U$ ならば $N_U^- \neq N_U$ であることにまず注意する. 実際, $N_U^+ = N_U^- = N_U$ ならば $N_U \cup M = \bar{U}$ となるが, このようなことのおこり得ないことはすでに知られている.（たとえば[ ]）

$N_U^+ = N_U$ なら $N_U^- \supset N_U^+$ で, したがって

$$\bar{U} - M = N_U^+ \cup N_U^- = N_U^- \supset N_U, \quad N_U^- - N_U \neq \phi.$$

そこで $\bar{U} - M = N_U \cup (N_U^- - N_U)$ と分解してみると, N_U も $N_U^- - N_U$ も空でなく, $\bar{U} - M$ は連結で, N_U は $\bar{U} - M$ において閉じているから, $N_U^- - N_U$ は $\bar{U} - M$ において閉じていることはない. ゆえに N_U は開集合ではなく, 境界点をもつ.

そこで N_U のいくらでも近くに $N_U^- - N_U$ の点 y が存在する. ところが補題1により, $L^+(y) \neq \phi$, $L^+(y) \subset M$. ゆえに $C(y)$ 上の点 z で $C^+(z) \subset \bar{U}$ となるものが存在する. これは $z \in N_U^+ = N_U$ であることを意味し, したがって $y \in C^+(z) \subset N_U$ で これは $y \in N_U^- - N_U$ と矛盾する.

$N_U^- \neq N_U$ も同様に証明される.（証明終）

系. $(\bar{U} - M) - N_U$ は連結ではない.

証明 $\bar{U} - M = N_U^+ \cup N_U^-$ であるから

$$(\bar{U} - M) - N_U = (N_U^+ - N_U) \cup (N_U^- - N_U)$$

なる分解ができて $(N_U^+ - N_U) \cap (N_U^- - N_U) = \phi$. また補題2により $N_U^+ - N_U \neq \phi$, $N_U^- - N_U \neq \phi$. また一方

$$N_U^+ - N_U = N_U^+ \cup N_U^- - N_U^- = (\bar{U} - M) - N_U^-,$$

$$N_U^- - N_U = N_U^+ \cup N_U^- - N_U^+ = (\bar{U} - M) - N_U^+,$$

であるから $N_U^+ - N_U$, $N_U^- - N_U$ はともに $\bar{U} - M$ において開いている. ゆえに $(\bar{U} - M) - N_U$ は連結ではない.

以上のことをまとめて:

定理4. (3) の場合, $\bar{U} - M$ には少なくとも一つの positive parabolic region と少なくとも一つの negative parabolic region が存在する. もちろん elliptic region も少なくとも一つは存在する.

§4. (3) の場合: elliptic region

補題3. elliptic region はすべて ∂U と交わる.

証明. 近傍 U に関する elliptic region の任意の一つを E とする. N_U は $\bar{U} - M$ で閉じているから E も $\bar{U} - M$ で閉じている. $\bar{U} - M$ が連結であるから $E = \bar{U} - M$ でない限り, E は開集合ではあり得ない. ところが $E = \bar{U} - M$ となり得ないことはすでに知られている. ゆえに E は境界点 x を含む. そして $N_U^+ \cup N_U^- - N_U$ に属する点列 $\{x_n\}$ で $x_n \longrightarrow x$ となるものが存在する.

$$\{x_n\} \cap (N_U^+ - N_U) = \{x_n'\}, \quad \{x_n\} \cap (N_U^- - N_U) = \{x_n''\}$$

とおけば$\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$のうち少なくとも一方, たとえば$\{x_n'\}$は無限列である. $x_n' \in N_U^+ - N_U$であるから$C^-(x_n') \not\subset \bar{U}$. ゆえに$t_n < 0$で

$$\pi(x_n', t) \in U, \quad 0 \geqq t > t_n,$$
$$\pi(x_n', t_n) \in \partial U,$$

となるものが存在する. $\{\pi(x_n', t_n)\}$は∂U上に集積点yをもつ. ところでもし$t_n \to -\infty$ならば$y \in J^-(x)$. ゆえに, $J^-(x) \not\subset M$. 一方$x \in E \subset N_U \subset N_U^-$であるから$L^-(x) \cap M \neq \phi$. これは定理1によりMがsaddle setであることを示し, 仮定に反する. ゆえに$\{t_n\}$は有界で, $t_n \to T$, $0 \geqq T > -\infty$, と考えてよい. するとπの連続性から$\pi(x, T) = y$. $x \in E$であるから$C(x) \subset E$で, したがって$y \in E$. ゆえに$E \cap \partial U \ni y$で, Eは∂Uと交わる(証明終).

<u>補題4</u>. elliptic regionの中には内点をもつものが少なくとも一つ存在する.

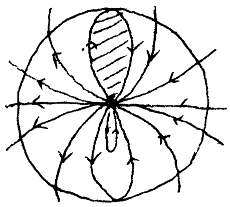
<u>証明</u>. N_Uが内点をもつことを示せばよい. ところで補題3の証明で示したように, elliptic regionの境界点を通る軌道は必ず∂Uと交わるから, N_Uに属する軌道で∂Uと交わらないものがあることをいえばよい.

VをMの近傍で$\bar{V} \subset U$となるものとする. すでに示したように$N_V \neq \phi$. そこでN_Vに属する軌道の一つ$C(x)$をとれば

$C(x) \subset \bar{V} \subset U$ であるから明らかに

$$C(x) \subset N_U, \quad C(x) \cap \partial U = \phi .$$

これで証明された（証明終）.



注意　ただしすべての elliptic region が内点をもつというわけではない.

右の図を参照せよ. このとき X は平面から斜線の部分を除いた所で, 円の内部が U, U の中心の特異点が M である.

補題5. 内点をもつ elliptic region の数は可算である.

U' を M の近傍で $\bar{U'} \subset U$ であるようなものとすると, U に関する elliptic region で $N_{U'}$ と交わるものの数は有限である.

証明　内点をもつ elliptic region の全体を $\{E_\alpha\}$ とし, N_U および E_α の内部を I, I_α で表わす. 明らかに $I = \bigcup I_\alpha$. I と I_α はすべて開集合で, $\alpha \neq \beta$ ならば $I_\alpha \cap I_\beta = \phi$ である. さて $\bar{U}$ はコンパクトであるから開集合の可算基底をもつ. I は $\bar{U}$ の中の開集合であるから, I の被覆 $\bigcup I_\alpha$ は可算な sub-covering をもつ. ところが $I_\alpha \cap I_\beta = \phi$ $(\alpha \neq \beta)$ だから $\bigcup I_\alpha$ の proper subunion は決して I を覆わない. ゆえに $\{I_\alpha\}$ 自体が可算でなければならない.

後半を証明するには, U に関する elliptic region で $N_{U'}$ と交わるものの全体を $\{E'_\alpha\}$ とする.

$x \in N_{U'}$ ならば $C(x) \subset \bar{U'} \subset U$ で, したがって $C(x) \cap$

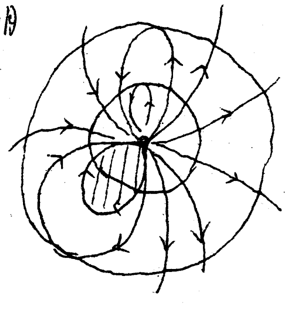
$\partial U = \phi$. ゆえに x は E'_α の内点である. またすべての E'_α は定義により $N_{U'}$ の点を含むが, これは明らかに E'_α の内点である. ゆえに E'_α の内部を I'_α とすると,

$$I'_\alpha \neq \phi, \qquad \bigcup I'_\alpha \supset N_{U'}.$$

$W \in M$ の任意の閉近傍で $\overline{W} \subset U'$ となるものとする. そして $K = N_{U'} \cap (X - W)$ とおけば K は non-empty かつ compact で $\bigcup I'_\alpha$ は K の open covering である. ゆえに $\bigcup I'_\alpha$ の中から K の finite subcovering をとりだすことができる.

I'_α は $N_{U'}$ の点を含んでいるから, それは U' に関する elliptic region を少なくとも一つ含んでいる. それをたとえば $E_{U'}$ とすれば $E_{U'} \cap \partial U' \neq \phi$ (補題3) で $\partial U' \subset X - W$ であるから $E_{U'}$ は K の点を含んでいる. ゆえにどの I'_α も K の点を含んでいる. さらに $\alpha \neq \beta$ ならば $I'_\alpha \cap I'_\beta = \phi$ であるから, $\bigcup I'_\alpha$ から K の subcovering をえらびだすとき, どの I'_α もおとすことができない. ゆえに $\{I'_\alpha\}$ 自身が有限個でなければならない (証明終).

<u>注意</u> E が内点をもった elliptic region ならば, $E \cap N_{U'} \neq \phi$ となるような U' $(\overline{U'} \subset U)$ が存在することは明らかであるが, 任意に U' をとったのでは必ずしも $E \cap N_{U'} \neq \phi$ となるとは限らない.



以上のことをまとめると,

定理5. (3)の場合 $\overline{U}-M$ には必ず elliptic region が存在し、それらはすべて ∂U と交わる。elliptic region のうち少なくとも一つは内点をもち、内点をもつ elliptic region の総数は可算である。

最後に elliptic region が内点をもつための一つの十分条件をあげておく。

定理6. E を U に関する elliptic region とする。M の近傍 U_1 で、$\overline{U_1}\subset U$, かつ $\overline{U_1}\cap E$ が連結であるようなものが存在するならば E は内点をもつ。

証明. そのような近傍 U_1 が存在したとする。$C(x)$ を E の中にある軌道とすると、$L^{\pm}(x)\neq\phi$, $L^{\pm}(x)\subset\overline{U}$ であるから

$$L^{+}(x)\cap M\neq\phi,\qquad L^{-}(x)\cap M\neq\phi.$$

ゆえに定理1により

$$L^{+}(x)\subset M,\qquad L^{-}(x)\subset M.$$

したがって次のような点 y, z が存在する。

$$y\in C^{+}(x)\cap\overline{U_1},\qquad C^{+}(y)\subset\overline{U_1},$$

$$z\in C^{-}(x)\cap\overline{U_1},\qquad C^{-}(z)\subset\overline{U_1}.$$

これは $y\in N^{+}_{U_1}$, $z\in N^{-}_{U_1}$ であることを示す。したがって

$$N^{+}_{U_1}\cap E=E^{+},\qquad N^{-}_{U_1}\cap E=E^{-},$$

とおけば $E^{+}\neq\phi$, $E^{-}\neq\phi$。$G_{U_1}=\phi$ であるから

$$E\cap\overline{O}_1=E\cap(\overline{U}_1-M)=E^{+}\cup E^{-},\qquad E^{+}\neq\phi,\ E^{-}\neq\phi,$$

$N^+_{U_1}$, $N^-_{U_1}$ は $\bar{U}_1 - M$ において閉じているから，E^+ と E^- は $E \cap (\bar{U}_1 - M) = E \cap \bar{U}_1$ において閉じている．しかも $E \cap \bar{U}_1$ が連結であるから

$$E^+ \cap E^- = N_{U_1} \cap E \neq \phi.$$

ところが $x \in N_{U_1} \cap E$ ならば $C(x) \subset \bar{U}_1 \subset U$ で，したがって $C(x) \cap \partial U = \phi$．ゆえに x は E の内点である（証明終）．

文　献

[1] T.Saito, On a compact invariant set isloated from minimal sets, Funkcial Ekvac. 12(1969), 193-203