数理解析研究所講究録
第116巻1971年45-60

楕円モジュラー曲面

東大 理 塩田徹治

Kを代数体又は一変数代数函数体, AをK上定義されたアーベル多様体とする。AのK-有理点のなす群A(K)について A(K)は有限生成なアーベル群であることが知られている。(Mordell-Weilの定理, 但しKが函数体のときAに多少条件がつく)。しかしながら, K, Aが与えられたとき群A(K), とくにrank A(K), を求めることは(Aの次元が1の時でも)一般に非常に難しい問題であり, いくつかの興味ある予想が提出されている.(e.g. Cassels [1], Tate [7]).

この小文では Kが複素数体$\mathbb{C}$上の一変数函数体, AがK上の楕円曲線のときに 上の問題及びそれとある意味でdualな問題 — Aのprincipal homogeneous spacesの群に関する — を 楕円曲面の立場から考察する。基礎体を$\mathbb{C}$に限る代りに 必ずしも代数的でない解析的曲面をも考え その中で 代数的なものが どう分布しているかも問題とする.

次に、楕円モジュラー群から自然に定義される楕円モジュラー曲面について、これらの問題を考える。この楕円モジュラー曲面は、基礎体の標数が正のときにも、定義され、それらは、曲面の数論的研究のために、意味ある例を与えるものと思われるが、これんついては別の機会にゆずりたい。

§1. 準備　この節では、楕円曲面の一般論（小平[4]による）から以下に必要な部分を復習し、あわせて記号を定める。

a) Sを楕円曲面とする。定義により、代数曲線Δと、SからΔへの正則写像Φとがあって、$\Delta \ni u$上のfibre $C_u = \Phi^{-1}(u)$は、有限個のuを除いて、楕円曲線となる。除外されたuの集合を$\Sigma \subset \Delta$とする。$v \in \Sigma$のときC_vはsingular fibreとよばれ、S上のdivisonとして次のようにかかれる:

(1.1) $$C_v = \sum_{i=0}^{n_v} m_{v,i}\,\Theta_{v,i}$$

ここに、$m_{v,i} \geq 1$、$\Theta_{v,i}$はS上の既約曲線、n_v+1でC_vの既約成分の数を表わす。singular fibresのtypeは、完全に分類されている([4], §6)。以下では、常に各fibreは第一種例外曲線を含まないとする。更に、SがΔ上のholomorphic section $o : \Delta \longrightarrow S$ ($\Phi \circ o = id_\Delta$) をもつとき、Sをbasic typeの楕円曲面とよび、Sの代りに、文字Bを用いる。

Bは代数曲面となる。この場合 singular fibre C_v を (1.1) のように表わすとき 曲線 $o(\Delta)$ と交わる唯一の成分 $\Theta_{v,i}$ を $\Theta_{v,0}$ とかくことにする: $\Theta_{v,0} \ni o(v)$, $m_{v,0} = 1$.

b). 次に 楕円曲面 $B \to \Delta$ の homological invariant, functional invariant を夫々 $G, \mathfrak{J}$ で表わす。$\mathfrak{J}$ は Δ 上の函数で generic fibre の楕円曲線の j 変量に対応する。Gは Δ 上の層で $G|_{\Delta'}$ (但し $\Delta' = \Delta - \Sigma$) は locally constant その stalk は次のように与えられる:

$$G_u = H^1(C_u, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2, \quad u \in \Delta'$$

(1.2)
$$G_v \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & v \in \Sigma,\ C_v : \text{type } I_b\ (b \geq 1) \\ 0 & \text{〃} \quad \text{〃} : \text{他の type} \end{cases}$$

Gは Δ' の基本群 $\pi_1(\Delta')$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ への表現を定め 逆にそれで定まる。さて Δ 上の data $\mathfrak{J}, G$ を固定して これを functional 及び homological invariant としてもつ Δ 上の楕円曲面の族(を適当な同値関係でわけたもの)を $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{J}, G)$ とかく。Bから出発するとき Bは Δ 上 global section をもつ $\mathcal{F}$ の unique member として特徴づけられる。逆に $\mathfrak{J}, G$ がある compatibility 条件をみたすとき $\mathcal{F}(\mathfrak{J}, G)$ に属す basic type の楕円曲面が存在する ([4] §8).

c) Bに対して Δ 上の section o を identity section とする group scheme (又は 複素Lie群の fibre system) $B^{\#}$

が定義される: $B^\# \subset B$。 $v \in \Delta$ について $C_v^\# = C_v \cap B^\#$ は $o(v)$ を単位元とする群で、その単位元の成分 $C_{v,0}^\#$ は、楕円曲線、$\mathbb{C}^\times$(乗法群)、$\mathbb{C}$(加法群) のいづれかである (rank $G_v = 2, 1, 0$ に対応して)。更に $C_v^\#/C_{v,0}^\#$ は有限可換群でその位数 $c_v = \#\{i \geq 0 \mid m_{v,i} = 1\}$ である。([4] p.604)。さて $\Omega(B^\#)$ で $B^\#$ の Δ 上の (holomorphic) sections の sheaf を表わし cohomology 群 $H^q(\Delta, \Omega(B^\#))$ $(q=0, 1)$ を考える。$q=0$ のとき $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ は B の Δ 上の section のなす群に他ならない。Functional invariant $J \neq \text{const}$ のときこれは Mordell-Weil の定理により有限生成な群である。$q=1$ については、前の楕円曲面の族 $\mathfrak{F}(J, G)$ と $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ との間に1対1の対応がある。即ち、各元 $\eta \in H^1$ に対し B を η で twist した楕円曲面 B^η が定義され $\mathfrak{F}(J, G) = \{B^\eta \mid \eta \in H^1\}$ となる ([4] Th.10.5) 更に B^η が代数曲面 $\iff$ η が有限位数 となることが証明されている (同 Th.11.5)。

d) Δ 上の line bundle $\mathfrak{f}$. ([4] §11). $\mathfrak{f}$ の $v \in \Delta$ での stalk $\mathfrak{f}_v$ は $C_{v,0}^\#$ の $o(v)$ での tangent space である。$\mathfrak{f}$ の holom. sections の sheaf $\mathcal{O}(\mathfrak{f})$ について次の完全列が成立つ:

(1.3) $$0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathfrak{f}) \xrightarrow{h} \Omega(B_0^\#) \longrightarrow 0.$$

B の canonical bundle K は Δ のそれを $\mathfrak{k}$ として $K = \Phi^*(\mathfrak{k} - \mathfrak{f})$ で与えられる。とくに B の geometric genus $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Delta, \mathcal{O}(\mathfrak{f}))$.

§2. Sectionsの群とNéron-Severi群　以下 $J \neq \mathrm{Const}$ と仮定する。楕円曲面 B の Δ 上の sectionsの群 $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ は有限生成だから、その rank を r とする。さて group scheme $B^\#$ の単位元成分を $B_0^\#$ とし、sheaf $\Omega(B^\#)$ の subsheaf $\Omega(B_0^\#)$ による商を Q とかく。Q は $\Sigma (\subset \Delta)$ 上に support をもつ。その stalk $Q_v = C_v^\# / C_{v,0}^\#$ である。完全列

(2.1)　$$0 \longrightarrow \Omega(B_0^\#) \longrightarrow \Omega(B^\#) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

より次のことは容易に分る。(i). $H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ は $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ の有限指数の部分群、従って その rank も r である。
(ii) $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は $H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ の有限群による商となる。
そこで §1. d) の (1.3) から導かれる Cohomology の完全列

(2.2)　$$0 \longrightarrow H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \longrightarrow H^1(\Delta, G) \xrightarrow{\iota^*} H^1(\Delta, \mathcal{O}(\mathfrak{f}))$$
$$\xrightarrow{h^*} H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \longrightarrow H^2(\Delta, G) \longrightarrow 0.$$

を考える。

Lemma.1.　$G \neq$ trivial のとき

　i) $H^1(\Delta, G)$ は有限生成で rank $4g-4+2t-t_1$

　ii) $H^2(\Delta, G)$ は有限群

但し g は Δ の genus, t は B の singular fibres の総数 t_1 は type I_b $(b \geq 1)$ の singular fibres の数。

証明略

今、$r' = \mathrm{rank}\ \iota^* H^1(\Delta, G)$ とおく。(2.2)と Lemma から

明らかに

(2.3) $$r + r' = 4g - 4 + 2t - t_1.$$

更に r' は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ が $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\nu$ に同型な部分群を含むような最大の ν として定義してもよい。式 (2.3) は Ogg - Šafarevič の公式とよばれるものの特別な場合である。($2t - t_1 = \sum_v \varepsilon_v$, $\varepsilon_v = 2 - \mathrm{rank}\, G_v = 0, 1, 2$ に注意)。

次に曲面 B の Néron-Severi 群 NS(B) を考える。これは B 上の因子の群を代数的同値でわったものとして定義される。$\mathbb{C}$ 上の代数曲面の場合には NS(B) は 2 次整係数 homology 群 $H_2(B, \mathbb{Z})$ (或は cohomology 群 $H^2(B, \mathbb{Z})$) の部分群とみなされる。その rank ρ (= B の Picard 数) は basic type の楕円曲面のとき次式で与えられる。

Th. $$\rho = r + 2 + \sum_{v \in \Sigma} n_v .$$

ここに r は上の通り $= \mathrm{rank}\, H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$, n_v は C_v の既約成分の個数 − 1.

より詳しく次のことが分る。$H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ mod torsion の basis を $s_1, \cdots, s_r$ とする。一般に section s の定める B 上の曲線 $s(\Delta)$ を (s) とかくことにすると $r + 2 + \sum n_v$ の因子

$$C_u, \ (0)\ ; \ (s_\alpha) - (0) \ (\alpha = 1, \cdots, r);$$

$$\Theta_{v,i} \quad (v \in \Sigma,\ i \geqq 1)$$

は互に独立で $NS(B)$ の有限指数の free submodule を生成する.(その指数は $H^0(\Delta,\Omega(B^{\#}))_{tor}$ の位数に等しい).

この定理は次の Lemma と generic fibre の楕円曲線上の Abel の定理を用いて証明される.

Lemma 2. $\forall u_1, u_2 \in \Delta$ について $C_{u_1} \approx C_{u_2}$ (代数的同値)

とくに $C_u \approx \Theta_{v,0} + \sum_{i\geq 1} m_{v,i}\Theta_{v,i}$.

Lemma 3. B 上の因子 D, D' の交点数を (DD') とかくとき,次の整係数二次形式

$$\sum_{i,j=1}^{n_v} (\Theta_{v,i}\Theta_{v,j})\, x_i x_j \qquad , v \in \Sigma$$

は負定値で,その判別式の絶対値は $c_v = |C_v^{\#}/C_{v,0}^{\#}|$ である.

証明は,前者は代数的同値の定義より明らか.後者は singular fibre の各 type について確められる。例えば type II^* の singular fibre は 8 変数で判別式 1 なる負定値整係数二次形式を与える。

Cor. $NS(B)$ mod torsion の basis を $D_1, \cdots, D_\rho$ とすると

$$\frac{|\det(D_i D_j)|}{|NS(B)_{tor}|^2} = \frac{d\cdot\prod c_v}{|H^0(\Delta,\Omega(B^{\#}))_{tor}|^2}.$$

ここに $d = \left|\det\left(\widehat{(s_\alpha)-(0)}\cdot\widehat{(s_\beta)-(0)}\right)\right|_{1\leq\alpha,\beta\leq r}$.

Remark. $NS(B)$ は実際は torsion-free である,又 $H^0(\Delta,\Omega(B_0^{\#}))$ も torsion-free で $H^0(\Delta,\Omega(B^{\#}))$ の free part を与える。

さて B の ν 次 Betti 数を b_ν とかくと $b_1 = 2g$ であり b_2 は $2 - 2b_1 + b_2 = c_2$ (B の Euler 標数) で与えられる。c_2 は [4] §12 より B の singular fibres によって計算される。Ogg - Šafarevič の式 (2.3) を用いて 次を得る。

Th. $\quad b_2 - \rho = r'.$

更に $b_2 = \sum_{i+j=2} h^{i,j}$, $h^{0,2} = h^{2,0} = p_g$, $h^{1,1} \geqq \rho$ (Lefschetz-Hodge) だから

Cor. $\quad r' \geqq 2p_g$. 又は

$$r \leqq 4g - 4 + 2t - t_1 - 2p_g.$$

Remark rank r について 底曲線 Δ (又はその函数体 K) (の genus g) だけによる universal な上限はない。(Lapin; 代数体の場合 Tate - Šafarevič, Soviet Math. Dokl. 1967) ついでにいえば torsion part の位数 $|H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}|$ については g のみによる上限がある。(Levin, Amer. J. 1968)

§3. Density of $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ in $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$. まず $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ に次のように位相を入れる。(2.2) より

$$H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \simeq H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))/i^* H^1(\Delta, G) \times H^2(\Delta, G).$$

であるが $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての自然な位相をもつから 上式の右辺に (商位相) × (discrete 位相) なる位相を入れ 同型で左辺のそれを定める。又 §2 初めに

注意したように，$H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は $H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ の有限部分群による商だから，これに商位相をいれる．

問題．$H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ (= torsion subgroup) は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ において dense か？

上の位相の入れ方から，明らかに次の (1), (2) は同値である．

(1) $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ で dense。

(2) $i^* H^1(\Delta, G)$ は $\mathbb{R}$ 上 $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ を生成する．

更に §1. c) で述べたように，B を一員とする楕円曲面の族 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(g, G)$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ で parametrize され，$H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ は丁度 $\mathcal{F}$ に属する代数曲面をあらわすから，(1) は次のようにいいかえられる．

(3) $\mathcal{F}$ の中で，代数曲面は稠密に分布する．

この問題は，B が後述する楕円モジュラー曲面の場合 [6] において，志村 [5] の結果に帰着させて解決された。一般の場合には，まず B 上の層の完全列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times \to 0$ を考える。対応する cohomology 列において，$H^1(B, \mathcal{O}^\times)$ の $H^2(B, \mathbb{Z})$ への像は，前節で考えた $NS(B)$ と同一視されるから，次の完全列を得る：

$$
\begin{array}{l}
0 \longrightarrow NS(B) \longrightarrow H^2(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} H^2(B, \mathcal{O}) \longrightarrow \\
\hspace{16em} \downarrow \psi
\end{array}
$$

一方，(2.2) より

$$0 \longrightarrow H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \longrightarrow H^1(\Delta, G) \xrightarrow{i^*} H^1(\Delta, \mathcal{O}(f)) \longrightarrow$$

Lemma: $H^2(B, \mathcal{O})$ から $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ への同型写像 ψ が存在し $\psi j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ と $\tau^* H^1(\Delta, G)$ は ($H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ において) commensurable である。

証明は $\Phi : B \to \Delta$ に関する Leray の spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(\Delta, R^q\Phi_*(\mathcal{O})) \Rightarrow H^*(B, \mathcal{O})$ と $R^1\Phi_*(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}(f)$ (or $R^1\Phi_*(\mathbb{Z}) \simeq G$) を用いてなされる。

従って 上の (2) と 次の (4) とは同値である。

(4) $j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ は $\mathbb{R}$ 上 $H^2(B, \mathcal{O})$ を生成する。

Th. (1), ～ (4) は成立する。

証明. (4) が成立つことを示す。それには自然な準同型 $\mathbb{R} \to \mathcal{O}$ からひきおこされる $H^2(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\kappa} H^2(B, \mathcal{O})$ が上への写像であることをいえばよい。$H^2(B, \mathbb{R}) \ni c$ に対し c を代表する B 上の real d-closed 2-form を η とし η の (0,2)-成分を η' とおく。すると $\bar{\partial}$-closed form η' は Dolbeault isomorphism により $\kappa c \in H^2(B, \mathcal{O})$ に対応する。これより κ が上への写像なことは明らか。

Cor. $r' = 2p_g$ のとき, $\tau^* H^1(\Delta, G)$ は $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ の lattice.
(同様に $\rho = h^{1,1}$ のとき $j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ は $H^2(B, \mathcal{O})$ の lattice)
従って $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は 複素トーラス ($\times$ 有限群) の構造をもつ.

§4. 楕円モジュラー曲面. この節では,一変数保型函数論の知識(e.g. 河田[3])を仮定する。Γ を $SL(2,\mathbb{Z})$ の有限指数の部分群とする。よく知られているように,Γ は上半平面 $\mathfrak{H}=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(\tau)>0\}$ に $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:\tau\longmapsto\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ で作用し,商空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は有限個の cusps をつけ加えることにより compact な Riemann 面となる。これを $\Delta=\Delta_\Gamma$ とかく。我々は,Δ を底曲線とする自然な楕円曲面を定義したいのだが,その為に以下 "$\Gamma\not\ni-1_2$" と仮定する。

$$\mu=[SL(2,\mathbb{Z}):\Gamma\cdot\{\pm1_2\}]$$

$$g=\Delta_\Gamma \text{ の genus}$$

$$t'=\Gamma \text{ の cusps の数}$$

$$s=\Gamma \text{ の elliptic points の数},\quad t=t'+s$$

とおく。各 elliptic point を代表する Γ の元は,位数3で $SL(2,\mathbb{Z})$ の中で $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}^{\pm1}$ に共役である。又,各 cusp を代表する Γ の元は $\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}^{\pm1}$ 又は $\begin{pmatrix}-1&-b\\0&-1\end{pmatrix}^{\pm1}$ ($b\geq1$) の形の元に共役である;前者の場合,第一種の cusp といい,後者を第二種の cusp という。t_1 (又は t_2) で第一種 (又は第二種) の cusps の数を表わす:$t'=t_1+t_2$.

Γ の cusps と elliptic points の集合を Σ,$\Delta'=\Delta-\Sigma\subset\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ とおくと,Δ' の基本群 $\pi_1(\Delta')$ から $\Gamma\subset SL(2,\mathbb{Z})$ への自然な表現 φ が定まる(とくに,Γ が torsion-free のとき

$\pi_1(\Delta') \simeq \Gamma$)。 φ から Δ 上の sheaf G で Δ' 上 locally constant (fibre $\simeq \mathbb{Z}^2$) なるものがつくられる。次に $\Gamma \hookrightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ によって自然な写像 $\Gamma\backslash\mathfrak{H} \longrightarrow SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ があるが、これは $\mathcal{J} : \Delta_\Gamma \longrightarrow \Delta_{SL(2,\mathbb{Z})} \underset{j}{\simeq} \mathbb{P}^1$ なる Δ_Γ 上の有理型函数に延長される (j は普通の楕円モジュラー函数)。この $\mathcal{J}$, G の対は §1 b) の最後の所でふれた条件をみたすから $\mathcal{J}$, G を夫々 functional, homological invariant としてもつ Δ_Γ 上の basic type の楕円曲線 $B = B_\Gamma$ が一意的に存在する。この B_Γ を (Γ によって定まる) 楕円モジュラー曲面 (elliptic modular surface) とよぶことにする。

B_Γ の singular fibres は Σ 上にあって第一種の cusp 上には type I_b $(b \geq 1)$, 第二種の cusp 上には type I_b^* $(b \geq 1)$ 又 elliptic points の上には type IV^* の singular fibre がある (cf [4] p604)。従って t, t_1 は §2 Lemma 1 に使われた記号と同じ意味をもつ。

さて Δ_Γ と $\Delta_{SL(2,\mathbb{Z})}$ の invariant measure を比較して

$$2g - 2 + t' + \left(1 - \frac{1}{3}\right) s = \frac{1}{6}\mu$$

次に [4] p.14 (12.6) により ($p_a = B_\Gamma$ の arithmetic genus)

$$12(p_a + 1) = \mu + 6t_2 + 8s$$

従って $p_g = p_a + g$ は次式で与えられる

$$p_g = 2g - 2 + t - \frac{t_1}{2} \qquad (t = t' + s)$$

§2. Lemma 1 より $p_g = \frac{1}{2} \operatorname{rank} H^1(\Delta, G)$. 又は (2.3) により

$$r + r' = 4g - 4 + 2t - t_1 = 2p_g$$

一方 §2. 最後の Cor. により $r' \geqq 2p_g$。故に

Th. 楕円モジュラー曲面 B_Γ については

$$r = 0 \quad , \quad r' = 2p_g .$$

§3. 末の Cor. により

Cor. $H^1(\Delta_\Gamma, \mathcal{O}(\sharp))/i^* H^1(\Delta_\Gamma, G)$ （又は $H^1(\Delta_\Gamma, \Omega(B_\Gamma^\#))$）は p_g 次元複素トーラス（× 有限群）の構造をもつ。

Remark. この複素トーラスは [6] で示したように weight 3 の Γ-cusp forms の空間 $\mathfrak{S}_3(\Gamma)$ から志村 [5] の方法でつくった複素トーラスと同じものである。[5] では一般に weight m が偶数のとき、$\mathfrak{S}_m(\Gamma)$ からつくられたトーラスが（Petersson の内積を用いて）アーベル多様体となることが証明されているが、この方法は m が奇数のときは適用できない。しかし志村先生によれば適当な Γ に対しては m が奇数でも問題の複素トーラスの準同型環を考察することにより、それがアーベル多様体となることがいえるとのことである。

最後に具体的な例を考えよう。

例 $\Gamma(N)$ を level N の主合同部分群 $\{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1_2 \bmod N\}$ とする。$N \geqq 3$ のとき $\Gamma(N)$ は torsion-free

かつ，$\Gamma(N)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ の正規部分群であるから，$\Gamma(N)$ の全ての cusps は第一種となる。($s=0$, $t=\pm 1$)。$\Gamma(N)$ で定まる楕円モジュラー曲面を $B(N) = B_{\Gamma(N)}$ とかくことにする。$B(N)$ の singular fibre は全て type I_N である。$B(N)$ に関する numerical character g, p_g, $\cdots$ を $g(N)$, $p_g(N)$, $\cdots$ とかけば (cf. 河田[3].I. p.92)

$$\mu(N) = \frac{1}{2} N^3 \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$g(N) = 1 + \frac{N-6}{12N}\mu(N), \quad t(N) = \frac{1}{N}\mu(N).$$

$$\rho(N) = 2 + (N-1)\cdot t(N)$$

$$p_g(N) = \frac{N-3}{6N}\mu(N), \qquad b_2(N) = 2p_g(N) + \rho(N).$$

小さい N について

N	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	0	0	1	3	5	10	13
t	4	6	12	12	24	24	36	36
ρ	10	20	50	62	146	170	290	326
p_g	0	1	4	6	16	20	36	42
b_2	10	22	58	·	·	·	·	410.

さて $\Delta_{\Gamma(N)}$ は level N structure をもつ楕円曲線の moduli (のcompact化) を与え，$B(N)$ は そういう楕円曲線の universal family の一つの compact 化である。$B(N)$ については，rank $r=0$ のみならず

$$H^0(\Delta_{\Gamma(N)}, \Omega(B(N)^{\#})) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

が証明される。$N=3$ のとき，$B(3)$ は有理曲面で，$3^2=9$個

の sections は互いに交らない9個の第一種例外曲線を与える。$N=4$ のとき $B(4)$ は K3曲面で $p_g=1$ 次元の複素トーラスは，層数集法 $\Omega(\Pi)$ をもつ楕円曲線である。

Remark. $\Delta_{\Gamma(N)}$ の函数体 K_N は $\Gamma(N)$ に関するモジュラー函数体に他ならない。$B(N)$ の generic fibre を $E(N)$ とかくと $E(N)$ は K_N 上定義された楕円曲線で，その K_N-有理点の群は，$E(N)$ の N 等分点の群 $E(N)_N$ $(\simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2)$ に等しい。故に $E(N)/K_N$ は $N=2,3$ に関する次の事実（井草[2] p.464）の，一般の N への拡張（但し $k=\mathbb{C}$ として）を与えるものと解釈される。

(i) k を標数 $\neq 2$ の体，λ を k 上の変数，$K_2=k(\lambda)$ とする。K_2 上の楕円曲線 $E\ (\subset \mathbb{P}^2)$: $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$, 原点$=(0,1,0)$, について，E の K_2-有理点の群 $E(K_2) = E_2 = \{(0,1,0), (0,0,1)$ $(1,0,1), (\lambda,0,1)\}$.

(ii) k を標数 $\neq 3$ の体で 1 の3乗根を含むとする。μ を k 上の変数，$K_3=k(\mu)$ とすると，$E^{\subset \mathbb{P}^2}: x^3+y^3+z^3-3\mu xyz=0$,（その base point の一つ, e.g. $(1,-1,0)$, を原点として）について，$E(K_3) = E_3 = \{9$ つの base points$\}$。$k=\mathbb{C}$ のとき $\mathbb{P}^2$ からこの9つの点を blowing-up して得られる曲面は上記 $B(3)$ に同型である。

文献

1. J. W. S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, Jour. London Math. Soc. 41, (1966) pp. 193–291.
2. J. Igusa, Fibre systems of Jacobian varieties III. Amer. J. Math. 81 (1959) pp 453–476.
3. 河田敬義, 一変数保型函数の理論 I, II. (東大セミナリー・ノート).
4. K. Kodaira, On compact analytic surfaces II–III. Ann. of Math. 77 (1963) pp 563–626., 78 pp 1–40.
5. G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, Jour. Math. Soc. Japan 11 (1959) pp. 291–311.
6. T. Shioda, Elliptic modular surfaces, I, II. Proc. Japan Acad. 45 (1969) pp 786–790, 833–837.
7. J. Tate, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Sem. Bourbaki n°306 (1965/66) pp 1–26.