数理解析研究所講究録
第 117 巻 1971 年 8-15

偏微分方程式系における Lyapunov の方法について

東北大 理学部数学 内藤 敏機

§1 序

双曲型の偏微分方程式系

(1) $u_t + a(t)u_x = c(t)u + h(t,u)$

を考える。但し

$t,\ x \in R, \quad u \in R^n$

とし，双曲系の意味は λ行列 $\lambda I - a(t)$ の elementary divisors はすべて simple で，固有値はすべて実数である事とする([1])。u，a のノルムを

$$|u| = \max_{i=1,\cdots,n} |u_i|, \quad |a| = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

と定義する。$h(t,u)$ は $t \in R$，$|u| < \Omega$ に関して C^2 級で，

$$|h(t,u)| \le M_1 |u|^2, \quad |h_u(t,u)| \le M_2 |u|$$

とする。(1)に対して，$t=0$ で初期関数 $\bar{u}(x)$，$x \in R$，を与えて，$t \ge 0$ に接続する初期値問題を考える。$|a(t)|$，

$|c(t)|$ が，$t \in R$ で有界であって，$a(t), c(t), h(t,u)$ が (t,u) について C^2 級，$\bar{u}(x)$ が x について C^2 級で compact support を持つとすれば，初期値問題は $\exists T>0$ に対して，$0 \leq t \leq T$ で C^2 級，compact support の解を持つ（[1], [2]）。

以後 $u, v \in R^n$ に対して

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

R^2 で定義された関数 $f(t,x)$ に対して

$$\langle f(t,x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,dx$$

と記す。

§2 Zubov の方法

方程式系(1)の 0-solution の安定性を調べるために，解空間において定義される，正定値な汎関数を考える。適当な汎関数の，(1)の解にそっての値が，$t \to \infty$ の時減少する事と，0-solution の安定性とが対応する。安定性を調べる事は，この性質を持つ汎関数をさがす問題となる。Zubov の方法は，この汎関数を正定値な二次型式の積分の中から見つけ出そうとするものである。

compact support を持つ C^2 級の関数 $\varphi(x)$ と正定値な行列 $b(t)$ に対して，

$$(2)\quad V(t,\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x), b(t)\varphi(x))\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_x(x), b(t)\varphi_x(x))\,dx$$
$$= \langle (\varphi(x), b(t)\varphi(x)) \rangle + \langle (\varphi_x(x), b(t)\varphi_x(x)) \rangle$$

$$\equiv V_0(t,\varphi)+V_1(t,\varphi)$$

とおく。$V(t,\varphi)$は，φについて正定値な汎関数を定義する。

$u=u(t,x)$を，$t=0$ の時 $u=\bar{u}(x)$ である(1)の解で，定義域は $0\leq t<\infty$ とする。$u(t,x)$にそってのVの値

$$V(t)=V_0(t,u(t,\cdot))+V_1(t,u(t,\cdot))$$

の変化を調べる。部分積分を行って，

(3) $$\frac{dV_0}{dt}=\langle(u,[a(t)b(t)-b(t)a(t)]u_x)\rangle + \langle(u,[c^*(t)b(t)+b(t)c(t)+\frac{db}{dt}]u)\rangle + \langle(h(t,u),b(t)u)\rangle+\langle(u,b(t)h(t,u))\rangle$$

，但し，c^* は c の転置行列。

$a(t)$に対して，

(4) $$a(t)b(t)-b(t)a(t)=0$$

となり，かつ，$c(t)$に対して，

(5) $$c^*(t)b(t)+b(t)c(t)+\frac{db}{dt}\equiv d(t)$$

が，負定値行列となるように，$b(t)$，$d(t)$を選びたい。(5)の条件は，次のように考える事ができる。

(1)に対して，常微分方程式系

(6) $$\frac{du}{dt}=c(t)u$$

を考える。(6)の解，$u(t)$に対して，二次型式

$$Q(t)=(u(t),b(t)u(t))$$

を考え，解に沿って微分すると

$$\frac{dQ}{dt} = (u(t),\ d(t)u(t))。$$

従って，関係式(5)は，線型常微分方程式系(6)から決定される。$U(t,\tau)$を，tの関数として(6)の基本解行列で，$U(\tau,\tau)=I$（単位行列）を満たすものとする．負定値な行列$d(t)$に対して，$b(t)$を

(7) $$b(t) = -\int_t^{\infty} U(\tau,t)^* d(\tau)\, U(\tau,t)\, d\tau$$

によって定義する。もし$b(t)$が意味を持てば，これは明きらかに，正定値な行列で，(5)が成立する。従って，(6)の基本解行列Uに対して，(7)の積分が収束すればよい．この意味で(5)の関係は(6)から決定される。たとえば$C(t)$が定数行列Cで，Cのすべての固有値の実部が負ならば，任意の負定値定数行列dに対して，(7)の積分は収束し，$b(t)$は正定値定数行列である。尚，この場合には，(5)は

(5)′ $$c^* b + bC = d$$

で，dに対して，(5)′を満すbは唯一つ存在する。

Zubovの方法の主要な部分は，(7)の積分が存在するような常微分方程式系(6)の特徴づけを行っている事である（[6] p.219 Th81, p248−258）。

さて，$d(t)$を負定値な行列の範囲で動かして，(5)と(4)とが同時に成立するように，適当に選べたとする。そうすれば，(3)式は，

(8) $$\frac{dV_0}{dt} = \langle (u, d(t)u) \rangle + \langle (h(t,u), b(t)u) \rangle + \langle (u, b(t)h(t,u)) \rangle。$$

次に，$\frac{dV_1}{dt}$ を計算する．$u_x(t,x)$ は

(9) $$(u_x)_t + a(t)(u_x)_x = c(t)u_x + h_u(t,u)u_x$$

を満すから，(8)と同様の計算により，

(10) $$\frac{dV_1}{dt} = \langle (u_x, d(t)u_x) \rangle + \langle (h_u(t,u)u_x, b(t)u_x) \rangle + \langle (u_x, b(t)h_u(t,u)u_x) \rangle。$$

系(1)が線型の場合，即ち $h \equiv 0$ の場合は簡単で，

(11) $$\frac{dV}{dt} = \langle (u, d(t)u) \rangle + \langle (u_x, d(t)u_x) \rangle.$$

従って，たとえば一番簡単な場合，Cのすべての固有値の実部が負の場合は，Vをuのノルムと考えると，このノルムに関して，$u \equiv 0$ は一様漸近安定である（[5] P.32 Th 83）。$h \not\equiv 0$ の場合，$h(t,u)$の order の評価を用いて，(8)，(10)の右辺の第2，3項を処理し，Vが小さい時に

(12) $$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha V \qquad \text{for some } \alpha > 0$$

を得る（[2]）。この場合，Vは exponential order で減少し，ノルムVの意味で，(1)の 0-solution は一様漸近安定である。Sobolev の Lemma により，$\sup_{x \in R} |u(t,x)|$ は，ノルムVでおさえられ，前者のノルムが0に近ずく事がわかる。尚，[2]は系(1)において，$a(t)$の代りに $a + d(u)$，$h(t,u)$ の代りに $h(u)$ とおいて得られる，準線型方程式系に対して，結果

を得ている。

§3 線型双曲型方程式系の絶対安定問題

線型双曲型方程式系に対して，それの feed-back system を考える。

$$
(13)\quad \begin{cases} u_t = Cu - Au_x + \xi b \\ \xi_t = f(\sigma) \\ \sigma = (\nu, u) + (\mu, u_x) - \lambda\xi \end{cases}
$$

ここで，C, A は定数行列で，$u_t = Cu - Au_x$ は双曲型であるとする．$\xi = \xi(t, x) \in R$，$\nu, \mu, b \in R^n$ で定数ベクトルとする。$f(\sigma)$ は次の(i),(ii),(iii) を満たす実数値関数である．

(i) $f(\sigma)$ は $\sigma \in R$ で定義されて連続である。

(ii) $\sigma f(\sigma) > 0$

(iii) $\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\, d\sigma = \infty$

明きらかに $u \equiv 0$，$\xi \equiv 0$ は解である．この解に対して，次の問題（Lurie's problem）を考える。

問題　(i)～(iii)の条件を満たす任意の $f(\sigma)$ に対して，系(13)の解 (u, ξ) が $t \to +\infty$ の時 $(0, 0)$ に近ずくための必要十分条件を求めよ。control parameters b, ν, μ, λ をどのように決めればよいか。

この問題を系(13)の絶対安定問題と呼ぶ。系(13) は，

系 $u_t = Cu - Au_x$ の linear feed-back system である。(13)の絶対安定問題を一般に解く事は困難と思われる。

まず，(13)の解空間として

$$X = \{(u, \xi) \mid u \in C^1, \xi \in C^0, \|(u, \xi)\| = \sup_{x \in R} |u(\cdot, x)| + \sup_{x \in R} |u_x(\cdot, x)| + \sup_{x \in R} |\xi(\cdot, x)| < \infty\}$$

を考える．(u, ξ) から (v, σ) への変数変換

$$T: \begin{cases} v = Cu - Au_x + \xi b \\ \sigma = (\nu, u) + (\mu, u_x) - \lambda\xi \end{cases}$$

を行うと，(v, σ) は空間

$$Y = \{(v, \sigma) \mid v \in C^0, \sigma \in C^0, \|(v, \sigma)\| = \sup_{x \in R} |v(\cdot, x)| + \sup_{x \in R} |\sigma(\cdot, x)| < \infty\}$$

の要素である．$C, A, b, \nu, \mu, \lambda$ に対して適当な関係があれば，T は X から Y の上への1対1，両連続な線型変換である．(u, ξ) が(13)の解である時，(v, σ) は

$$(14) \quad \begin{cases} v_t = Cv - Av_x + f(\sigma) b, \\ \sigma_t = (\nu, v) + (\mu, v_x) - \lambda f(\sigma). \end{cases}$$

(13)の絶対安定問題を解く事は，(14)の絶対安定問題を解く事に，帰着される。それは(14)に対して適当な Lyapunov 関数，V を作って議論するのであるけれども，まだ成功していない。[3] 又は [4] の方法を参照されたい。

参考文献

[1] K.O. Friedrichs, Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables, Amer. J. Math., 70(1948) 555-589.

[2] A. Jeffrey & Y. Kato, Liapunov's direct method in stability ploblems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems, J. Math. Mech., 18(1969) 659-682.

[3] La Salle & Lefschetz, "Stability by Liapunov's direct method with applications", New York, London, Academic Press, 1965.

[4] Lefschetz, "Stability of nonlinear control systems", New York, London, Academic Press, 1965.

[5] T. Yoshizawa, "Stability Theory by Liapunov's Second Method", Tokyo, Math. Soc. Japan, 1966.

[6] V.I. Zubov, "Methods of A.M. Lyapunov and their application", Groningen, P. Noordhoff LTD, (1964).