

円柱表面に沿う液層の安定性

慶大工 長谷川英治
東大宇宙研 仲 矢 長次

§ 1. はじめに

鉛直平面壁を重力の作用のもとに流れ落ちる液層の安定性の問題は Kapitza⁽¹⁾ により実験及び理論の両面よりとり扱われ、かなり小さい Reynolds 数でないと安定な流れは存在しないことが得られました。その後、Yih⁽²⁾, Benjamin⁽³⁾ により、表面張力を考慮した厳密な計算が行われ、その結果、すべての有限な Reynolds 数に対し、流れは不安定であることが示された。

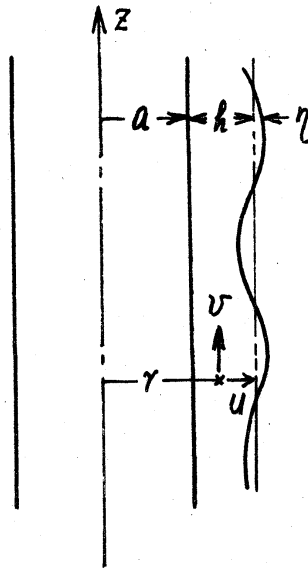
さて、重力の作用で壁面上を流れる流れは、普通円柱の表面の様な、曲率のある壁面上である場合がほとんどであるから、この種の流れの安定性への曲率の影響を調べることにした。

ここでは、円柱の外壁又は内壁を上を流れる液層の安定性を微小擾乱の範囲で調べた。その結果、壁面の曲率は流れの安

定性に大きな影響力をもち、曲率は流れを不安定にし、更に内柱の内壁に沿う流れよりも、外壁に沿う流れの方がより不安定となることが知られた。

§2. 基礎の流れ

長い鉛直円筒（半径 a ）上を非圧縮粘性流体が重力の作用で層をなして流れ落ちているとしよう。その層の厚さを h とし、円柱の軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) をとり、各方向の速度成分を v_r, v_θ, v_z とする。流れの場の対称性より $v_r = v_\theta = 0, v_z = \bar{v}(r)$ とする。この場合の運動方程式は



$$\frac{d\bar{p}}{dr} = 0,$$

$$\nu \left(\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} \right) = -g$$

であり、（ \bar{p} ：圧力、 ν ：動粘性係数、 g ：重力加速度）

これに対する境界条件は自由表面上で

$$\bar{p} - p_a = \frac{\sigma}{a+h}, \quad r = a+h$$

$$\frac{d\bar{v}}{dr} = 0,$$

円柱表面上で

$$\bar{v} = 0 \quad r = a$$

である。(p_a : まわりの圧力, σ : 表面張力係数)

これらの運動の方程式と境界条件より基礎の流れとして

$$\bar{p} = p_a + \frac{\sigma}{a+h} \quad (2.1)$$

$$\bar{v} = \frac{g}{4\nu} \left[r^2 - a^2 - 2(a+h)^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (2.2)$$

を得る。上式で、 h が負の値をとることも許せば、円柱の内壁面に沿って流れる場合も同じ式で表現される。

以下の計算において、長さの尺度としては層の厚さ h を、速度の尺度としては自由表面上の速さ v_0 を

$$v_0 = \frac{g h^2}{4\nu\beta}, \quad \frac{1}{\beta} = 2(1+\lambda)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) - (1+2\lambda),$$

$$\lambda = \frac{a}{h} \quad (2.3)$$

を用いる。

3. 微小擾乱の方程式系

乱れの発生についての今後の経験から、軸対称的乱れが優先すると考え、以下では、その採り場合には考慮を限ることにする。 r, z 方向の速度成分を u, v で表わすことにすれば

運動を支配する方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta v - \frac{4\beta}{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

となる。ここで $R = v_0 h / \nu$ (Reynolds 数) とある。こ
 て、これらの方程式を作るために、諸量を平均量とその変動分
 とに分けて

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p'$$

と表現し、変動量の $\frac{1}{R}$ 以上の項を省略するとすれば、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{R} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) \bar{u},$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{d\bar{v}}{dr} \bar{v} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta \bar{v},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

を得る。(' は簡単にするために省略した。)

上式の最後の式より、速度成分 u, v は流れの函数 ψ で

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

と表わされるので、これらの方程式は ψ について線形形の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (D^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \psi + \bar{v} (D^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \frac{\partial \psi}{\partial z} - D^2 \bar{v} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ = \frac{1}{R} (D^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2})^2 \psi \end{aligned}$$

にまとめられる。ここで

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

である。この式の線形性を用い、その解を Fourier 成分の形

$$\psi(r, z, t) = \phi(r) e^{i\alpha(z-ct)}$$

で表わるとすると、これらの方程式は次の様になる。

$$\begin{aligned} (\bar{v} - c) \left(\phi'' - \frac{1}{r} \phi' - \alpha^2 \phi \right) - \left(\bar{v}'' - \frac{1}{r} \bar{v}' \right) \phi \\ = \frac{1}{i\alpha R} \left[\phi'''' - \frac{2}{r} \phi''' - \left(2\alpha^2 - \frac{3}{r^2} \right) \phi'' \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left(2\alpha^2 - \frac{3}{r^2} \right) \phi' + \alpha^4 \phi \right] \quad (3.1) \end{aligned}$$

ここで ' は r についての微分を表す。

次に、この方程式に対する境界条件を考えよう。振動する自由表面の変位は

$$\eta = \delta e^{i\alpha(z-ct)}$$

と表わされるから、自由表面上での運動学的条件より

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial z} = u \quad r = \lambda + 1$$

を得る。又、この表面上での力の釣合いの条件より、接線方向について

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \bar{v}'' \eta = 0 \quad r = \lambda + 1$$

垂直方向について

$$p = \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial r} - S \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\eta}{(1+\lambda)^2} \right] \quad r = \lambda + 1$$

を得る。ここで

$$S = \frac{\sigma}{\rho v_0^2 h} = T \left(\frac{2\beta}{R^5} \right)^{1/3}, \quad T = \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2}{g v_0^4} \right)^{1/3}$$

である。

一方、円柱表面では粘着の条件より

$$u = 0 \quad r = \lambda$$

$$v = 0$$

である。

以上の境界条件を ϕ で書きあらわされると、以下に示す様になる。

$$\phi''' - \frac{1}{1+\lambda} \phi'' - \left[3\alpha^2 + \frac{1}{(1+\lambda)^2} - i\alpha R(1+c) \right] \phi' + \left[\frac{2\alpha^2}{1+\lambda} - \frac{i\alpha RS}{1+c} \left(\alpha^2 - \frac{1}{(1+\lambda)^2} \right) \right] \phi = 0, \quad (3.2)$$

$$r = \lambda + 1$$

$$\phi'' - \frac{1}{1+\lambda} \phi' + \left(\alpha^2 + \frac{4\beta}{1+c} \right) \phi = 0, \quad r = \lambda + 1 \quad (3.3)$$

$$\phi = 0, \quad r = \lambda \quad (3.4)$$

$$\phi' = 0, \quad r = \lambda \quad (3.5)$$

方程式 (3.1) に対する境界条件 (3.2 ~ 5) が α, R, S, λ, c についての固有値問題を構成する。以下では

$$c_i (= \rho_m(c)) = 0$$

として中立安定の条件を求め、議論する。

上述の式は λ に負の値をとることを許せば、円筒の内壁に沿う場合にも成立する。上の方程式系で、 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限を考えると、平面壁に沿う流れの場合の方程式となる。

§ 4. 固有方程式

上に得られた方程式系は $\lambda \leq r \leq \lambda + 1$ の範囲で解析的であるから、円柱表面での条件を満足する独立な解と、自由表

面での条件を満足する独立な解とを別々に Taylor 展開にて求め、これ等をもとにして、厚層の任意の点まで、数値的に積分し、そこで、三階の微分係数運がなめらかに接続することを要求して、求める固有関係を得る。

具体的には書けば、円柱表面の近くでの解、

$$X_1 = (r-\lambda)^2 + \frac{1}{12} \left(2\alpha^2 - \frac{3}{\lambda^2} - i\alpha R c \right) (r-\lambda)^4 + \dots,$$

$$X_2 = (r-\lambda)^3 + \frac{1}{2\lambda} (r-\lambda)^4 + \dots,$$

と自由表面の近くでの解

$$X_3 = 1 - \frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{4\beta}{1+c} \right) (r-\lambda-1)^2 + \dots,$$

$$X_4 = r-\lambda-1 + \frac{1}{2(1+\lambda)} (r-\lambda-1)^2 + \dots,$$

の組がなめらかに接続するための条件より、固有関係

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_1' & X_1'' & X_1''' \\ X_2 & X_2' & X_2'' & X_2''' \\ X_3 & X_3' & X_3'' & X_3''' \\ X_4 & X_4' & X_4'' & X_4''' \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

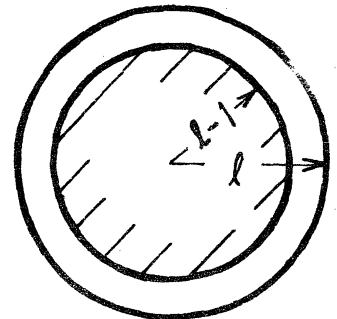
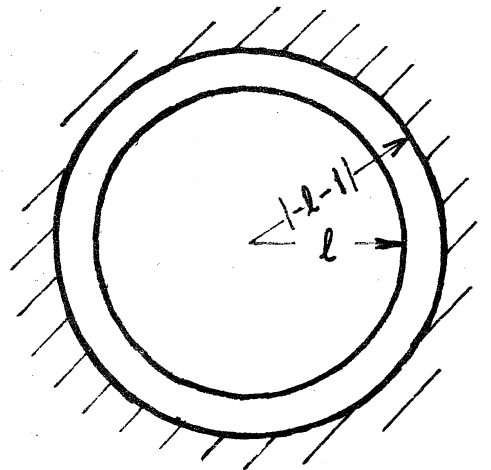
を得る。

§5. 結果

20°C の氷に相変する $T = 4.268 \times 10^3$ の場合について、
 色々な半径の中立安定曲線を描いたのが 図-1, 図-2 であ
 る。これ等の安定曲線の上方が安定領域であり、下方が不安
 定領域である。これ等の図より、 λ の大きさが小さくなる程、
 即ち、円柱の半径が小さくなる程、流れは不安定になる。更
 に、この両図の比較から、Reynolds 数の小さい範囲では、
 自由表面の半径を l として、円柱の外壁に沿う $\lambda = l-1$ の
 流れと内壁に沿う $\lambda = -l-1$ の流れとは非常によく似た安定曲
 線をもつことがわかる。従って

この流れの安定性は円柱の太さ
 ではなく、自由表面の半径で決
 定されることがわかる。(右図)
 図-3, 図-4 は Reynolds 数
 に対する位相速度 C_r の様子
 を示したものである。

Reynolds 数の値が零の極限
 の場合はエネルギーを考慮するこ
 とにより簡単に安定性の議論が
 出来る。乱れがない場合の円柱
 の単位長さ当たりの平均のポテン
 シャル・エネルギー E_0 は



$$E_0 = 2\pi\sigma(a+h_0).$$

ここで、 h_0 はこれの静止場合の液層の厚さである。一方、
これの扰动場合のエネルギー E_1 は

$$E_1 = 2\pi\sigma \frac{\alpha h}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} (\lambda+1+\eta) \sqrt{d\xi^2+d\eta^2}.$$

ここで、 η は自由表面の変位。流体の体積が保たれる条件より、 h と h_0 との間には

$$\pi(a+h_0)^2 = \frac{\alpha h^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \pi(\lambda+1+\eta)^2 \sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$$

の関係がある。これ等の関係式より δ^2 位の精度で、エネルギーの増分 $E_1 - E_0$ は

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2} \pi \sigma \delta^2 (a+h_0) (\alpha^2 - \alpha_0^2),$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{|\lambda+1|}$$

となる。これより、 $\alpha < \alpha_0$ では $E_1 < E_0$ となり、液層は不安定となる。

§ 6. 結論

以上の計算によれば、無次元化された円柱の半径 λ が夏
値をとることも許せば、円柱の外壁に沿う場合も内壁に沿う
場合も同じ方程式系で扱うことが出来る。

曲率の安定性への影響は大きく、曲率が大きい程流れは不安定となる。流れは曲率のある場合は非常に不安定であり、Reynolds数が零の状態でも臨界波数 $\alpha_0 = 1/|\lambda + 1|$ 以下で不安定となる。この流れの安定性は自由表面の位置で決定される。

文献

- 1) P. L. Kapitza : Zh. eksper. teor. Fiz. 18 (1948) 3;
18 (1948) 20; 19 (1949) 105.
- 2) C. S. Yih : Proc. 2nd. U. S. Cong. Appl. Mech. (1954)
p. 623.
- 3) T. B. Benjamin : J. Fluid Mech. 2 (1957) 554.

$$T = 4.268 \times 10^3$$

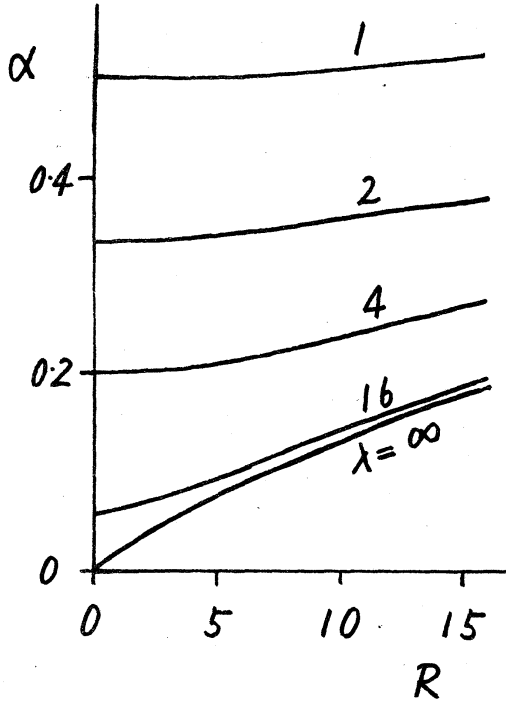


图-1 外壁

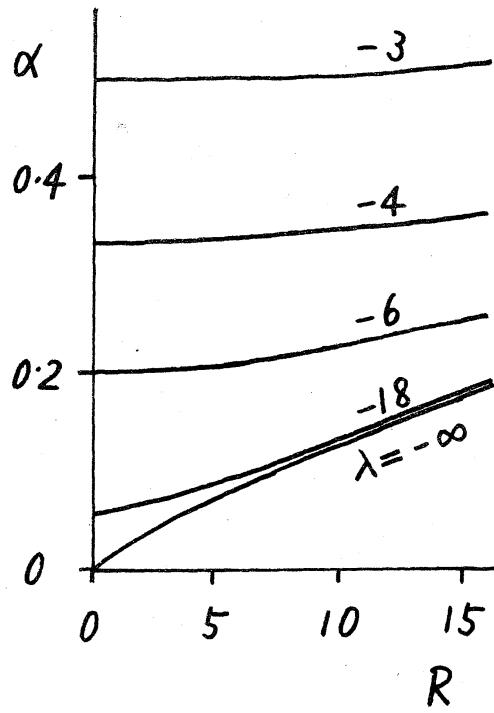


图-2 内壁

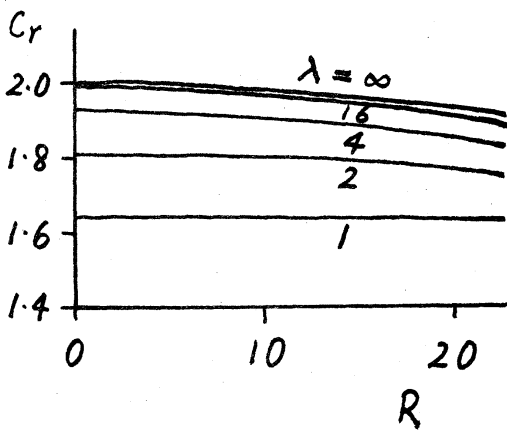


图-3 外壁

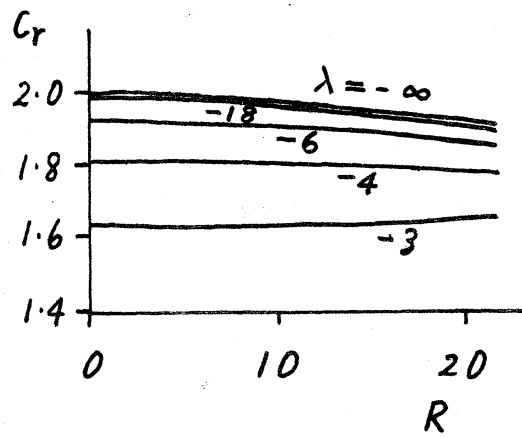


图-4 内壁