

Burgers 乱流の統計力学

京大理

巽 友正
木田 重雄

§1. 三角波の形成

Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

は、任意の初期値から出発しても、非粘性及び充分時間がたった極限 ($R \gg t \gg 1$) で、三角波を発生することを示そう。

方程式 (1) は、変換

$$u(x, t) = -\frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(x, t) \quad (2)$$

即ち、

$$\theta(x, t) = e^{-\frac{R}{2} \int^x u(x', t) dx'} \quad (3)$$

によって、熱伝導型方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4)$$

に変形できる。

この方程式(4)の解は初期値を含む積分で与えられる。

$$\theta(x,t) = \sqrt{\frac{R}{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x',0) e^{-\frac{R(x-x')^2}{4t}} dx' \quad (5)$$

さて、 $u(x,0)$ の不定積分を $U(x)$ とすれば、方程式(5)は次のようになる。

$$\theta(x,t) = \sqrt{\frac{R}{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{R}{2}U(x') - \frac{R(x-x')^2}{4t}} dx' \quad (6)$$

今、任意の初期値 $u(x,0)$ を与えよう。図1 a.にその一例が示してある。 $u(x,0)$ の不定積分 $U(x)$ は図1 b.に示してある。さて、 $u(x,0)$ の零点のうち傾きが正である点を $\dots, x_i, x_{i+1}, \dots$ とすると、これらの点は $U(x)$ の極小値を与える点となっている。簡単のため $x_i - x_{i-1}$ や $u'(x_i)$ は $O(1)$ の量としておく。ところで、方程式(6)の被積分函数の第1の因子 $e^{-\frac{R}{2}U(x')}$ は、 $R \rightarrow \infty$ の極限では図1 c.のような形になり、それぞれのピークの幅は、近似的に $\sqrt{\frac{1}{R|u'(x_i)|}}$ で与えられる。一方、第2の因子 $e^{-\frac{R}{4t}(x-x')^2}$ は、図1 d.に示してあるが、その幅は $\sqrt{\frac{t}{R}}$ の程度である。

以上のことを考慮すると、(6)の積分は、

$$\sqrt{\frac{1}{R}} \ll 1, \sqrt{\frac{t}{R}} \quad (7)$$

のときには、次式で与えられることがわかる。

$$\theta(x,t) = \sqrt{\frac{1}{t}} \sum_i \sqrt{\frac{1}{U''(x_i)}} e^{-\frac{R}{2}\left[U(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2t}\right]} \quad (8)$$

さて、

$$A_i \equiv U(x_i) - \frac{(x-x_i)^2}{2t} \quad (9)$$

$$A_m \equiv \max \{ A_i \} \quad (10)$$

としよう。(10) を満す m は、 $U(x)$ の形に依存して、一般には一つとは限らないが、ここでは次のような場合に語を限ろう。即ち、 $\xi_{i-1} < x < \xi_i$ を満す x に対しては、 m はただ一つしかないとする。よって、

$$m = l_i$$

としよう。ただし、ここに整数 l_i は、 $\dots, i-1, i, i+1, \dots$ の部分列である。もちろん、 $x = \xi_i$ のときは、 m は二つあり、

$$m = l_i \Rightarrow l_{i+1}$$

である。これは次の条件を与える。($R \rightarrow \infty$ で成立する式)

$$\sqrt{\frac{1}{U''(\xi_i)}} e^{-\frac{R}{2} \left[U(\xi_i) + \frac{(\xi_i - \xi_i)^2}{2t} \right]} = \sqrt{\frac{1}{U''(\xi_{i+1})}} e^{-\frac{R}{2} \left[U(\xi_{i+1}) + \frac{(\xi_i - \xi_{i+1})^2}{2t} \right]} \quad (11)$$

ただし、ここに、 $\xi_i = x_{l_i}$ である。

すぐわかるように、 m は x の単調増加関数である。即ち

$$\dots < \xi_{i-1} < \xi_i < \xi_{i+1} < \dots$$

である。

さて、 $R \rightarrow \infty$ のときに、(8) 式の右辺の和の中で、きいてくる項は、 $i = m$ の項だけであり、 $i \neq m$ の項は、無視できることに注意しよう。

すると、

$$\frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2} < x < \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}$$

のときには、(8) 式の和の中で l_i と l_{i+1} の二項だけを、残

しておけばよいことがわかる。つまり、

$$\theta(x,t) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{\sigma(\eta_i)}} e^{-\frac{R}{\varepsilon} \left[\sigma(\eta_i) + \frac{(x-\eta_i)^2}{2t} \right]} + \sqrt{\frac{1}{\sigma(\eta_{i+1})}} e^{-\frac{R}{\varepsilon} \left[\sigma(\eta_{i+1}) + \frac{(x-\eta_{i+1})^2}{2t} \right]} \right\}$$

である。この式と(11)式及び(2)式から

$$U(x,t) = \frac{1}{\varepsilon} (x - \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2}) - \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2t} \tanh \frac{R}{4t} (\eta_{i+1} - \eta_i) (x - \xi_i) \quad (12)$$

が導かれる。

$R \rightarrow \infty$ の極限では、

$$U(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} (x - \eta_{i+1}) & (\xi_i < x < \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}) \\ \frac{1}{\varepsilon} (x - \eta_i) & (\frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} < x < \xi_i) \end{cases} \quad (13)$$

となるが、これを図示すれば、図2の如くである。

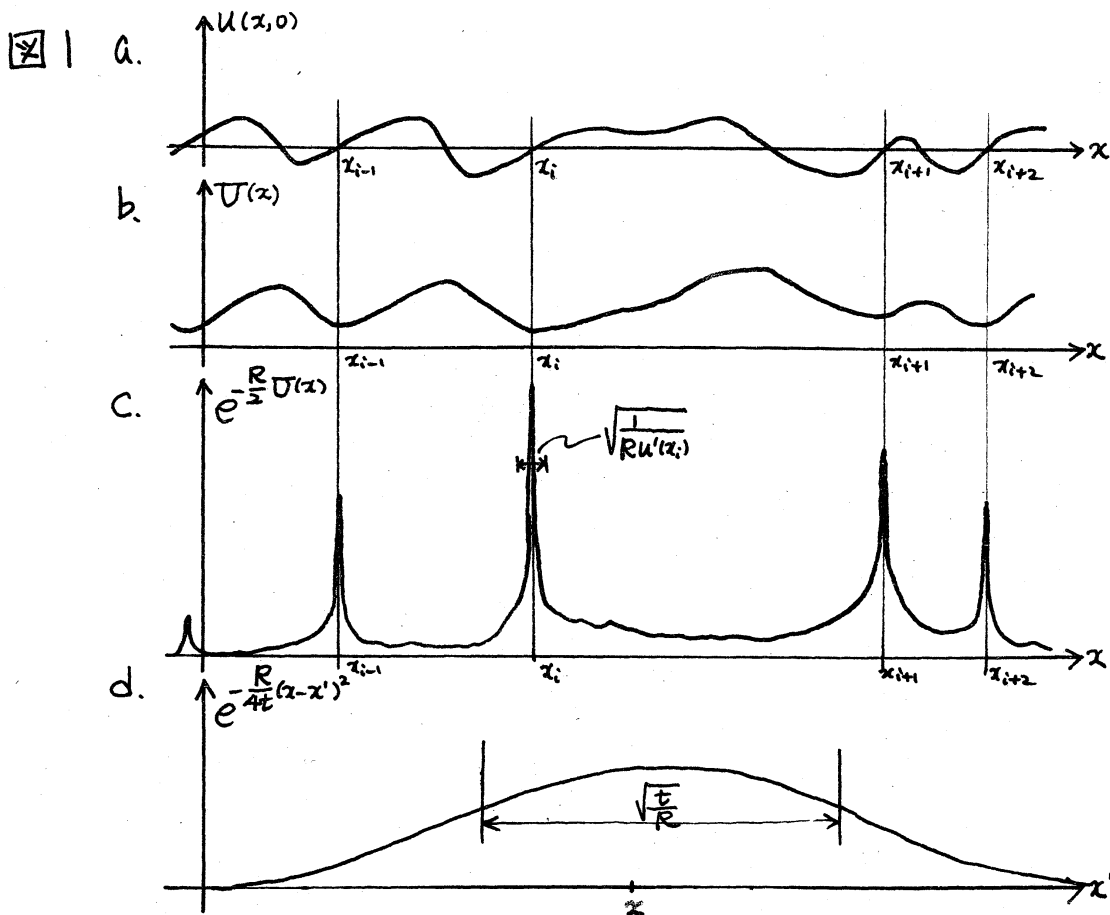
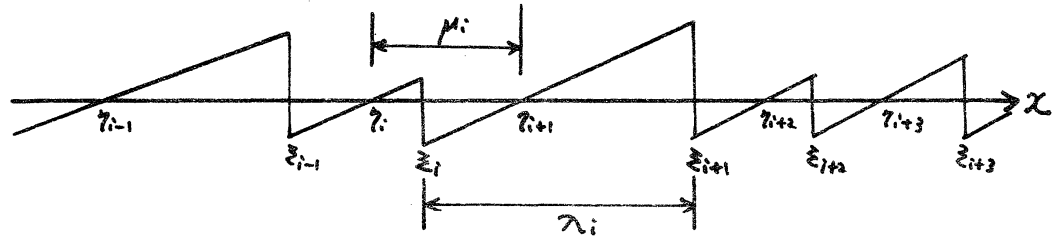


図2



§2. 三角波乱れ

前節で述べたように、Burgersの方程式(1)に支配される速度場は $R \gg \tau \gg 1$ では、いろいろな大きさの三角波の集まりとして記述される。そして、この三角波の場は、 $\{\xi_i\}$ $\{\eta_i\}$ で指定される。ところで、この $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$ がランダムに分布しているとすれば、それは、この速度場がランダムな三角波からできているとみなすことになる。ここでは、ランダムに分布した、三角波の統計力学を考察する。

ここで考える速度場は、図2のように、傾き β の平行な線分と、垂線から成り立っている。

傾き β の平行な線分と、 x 軸との支点を ξ_i 、垂線の位置を η_i で表わす。さらに、波長 λ_i 、hinge 間隔 μ_i を次のように定義する。

$$\lambda_i = \xi_{i+1} - \xi_i \quad (14)$$

$$\mu_i = \eta_{i+1} - \eta_i \quad (15)$$

ところで、この系の運動は、次のように要約できる。

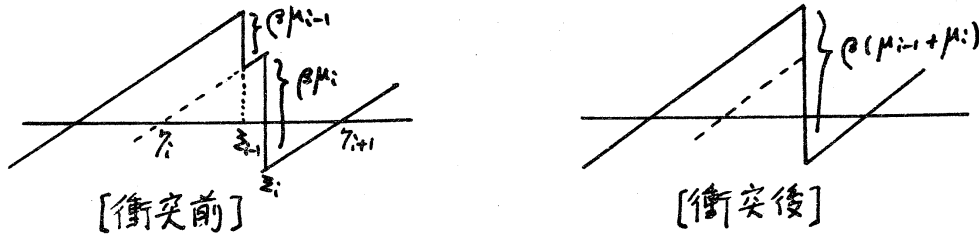
① 傾き β は $1/\tau$ に比例して変化する。

⑪ 垂線は一定速度で動く。(垂線の上端と下端の中間の速さ) 特に、波長 λ_i の時間変化は、次式で与えられる。

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{1}{t} \left\{ \lambda_i - \frac{1}{2} (\mu_i + \mu_{i+1}) \right\} \quad (16)$$

⑫ 衝突がないかぎり、hinge points ζ_i は静止している。そして、 ζ_{i-1} と ζ_i の垂線が衝突すると、hinge point ζ_i は消滅する。(図3参照)

図3



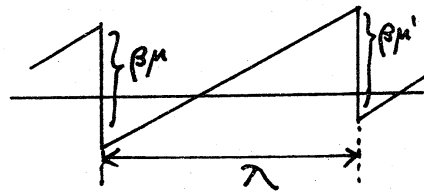
⑬ 幅 $\beta\mu_{i-1}$ と幅 $\beta\mu_i$ の垂線が衝突すると、幅 $\beta(\mu_{i-1} + \mu_i)$ の垂線ができる。(図3参照)

§3. 分布函数

さて、 $0 \leq x \leq L$ の範囲での垂線の総数を $N(t)$ 、 μ と $\mu + \delta\mu$ の間にある hinge 間隔の部分の数を $N(t) f(\mu, t) \delta\mu$ 、波長が λ と $\lambda + \delta\lambda$ の間にある波の数を $N(t) g(\lambda, t) \delta\lambda$ 、さらに、

図4

図4のような波の数を $N(t) g(\mu, \lambda, \mu', t) \delta\mu \delta\lambda \delta\mu'$ とする。また引き続き n 個



の波の波長の和が λ と $\lambda + \delta\lambda$ の間にある部分の数を $N(t) g_n(\lambda, t) \delta\lambda$ とする。もちろん $g_1(\lambda, t) = g(\lambda, t)$ である。定義から明らかに、次の関係式が成り立つ。

$$\int_0^{\infty} f(\mu, t) d\mu = 1 \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} g_n(\lambda, t) d\lambda = 1 \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} d\mu' g(\mu, \lambda, \mu', t) = g(\lambda, t) \quad (19)$$

§4. 分布函数方程式

さて、系の運動を考慮して、前節で定義した分布函数についての運動方程式を導こう。

まず、step幅が $(\beta\mu, \beta(\mu + \delta\mu))$ にある垂線の個数の変化を調べよう。 $\beta\mu'$ と $\beta\mu''$ の垂線が衝突すると、 $\beta(\mu' + \mu'')$ の垂線ができるが、それらが、まさに衝突せんとする瞬間、隣どうしにある個数は、

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} N(t) g(\mu', \lambda, \mu'', t) = N(t) g(\mu', 0, \mu'', t)$$

であり、それら二つの垂線が近づき合う速さは、(16)より、

$$\frac{\mu' + \mu''}{2t}$$

であることがわかる。だから単位時間に $\beta\mu'$ と $\beta\mu''$ の垂線が衝突して、 $\beta(\mu' + \mu'')$ ができる個数は、

$$N(t) g(\mu', 0, \mu'', t) \frac{\mu' + \mu''}{2t}$$

となる。すると、 $(\beta\mu, \beta(\mu + \delta\mu))$ にある個数の時間変化を表

わす方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) f(\mu, t) \delta\mu &= -N(t) \int_0^\infty g(\mu, 0, \mu', t) \frac{\mu + \mu'}{2t} d\mu' \delta\mu \\ &\quad - N(t) \int_0^\infty g(\mu', 0, \mu, t) \frac{\mu + \mu'}{2t} d\mu' \delta\mu \\ &\quad + N(t) \int_0^\mu g(\mu', 0, \mu - \mu', t) \frac{\mu}{2t} d\mu' \delta\mu \quad (20) \end{aligned}$$

ところが $\frac{d}{dt} \delta\mu = 0$ であり、また(17)式を考慮すると、(20)式より、次の二つの式が導かれる。

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\frac{N(t)}{2t} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu' (\mu + \mu') g(\mu, 0, \mu', t) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mu, t) &= \frac{f(\mu, t)}{2t} \int_0^\infty d\mu' \int_0^\infty d\mu'' (\mu' + \mu'') g(\mu', 0, \mu'', t) \\ &\quad - \frac{1}{2t} \int_0^\infty d\mu' g(\mu, 0, \mu', t) (\mu + \mu') \\ &\quad - \frac{1}{2t} \int_0^\infty d\mu' g(\mu', 0, \mu, t) (\mu + \mu') \\ &\quad + \frac{\mu}{2t} \int_0^\mu d\mu' g(\mu', 0, \mu - \mu', t) \quad (22) \end{aligned}$$

次に、波長が $(\lambda, \lambda + \delta\lambda)$ にある個数の変化であるが、この数は、衝突によっては変化しないから、

$$\frac{d}{dt} N(t) \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu' g(\mu, \lambda, \mu', t) \delta\lambda = 0 \quad (23)$$

ところが、

$$\frac{d}{dt} \delta\lambda = \frac{1}{t} \delta\lambda$$

であるから、この式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu' \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\lambda - \frac{\mu + \mu'}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t} \int_0^\infty d\mu'' \int_0^\infty d\mu''' (\mu'' + \mu''') g(\mu'', 0, \mu''', t) \right\} \times \\ \times g(\mu, \lambda, \mu', t) = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

§5. 分布函数方程式の解

前節では分布函数の満すべき方程式系 (21), (22), (24) を導いた。ここでは、いくつかの仮定のもとに、これらの方程式を解こう。

① self-preserving solution に話を限る。つまり、 μ 入の分布函数の形はそのスケールが変わるだけで、構造そのものは不変。言いかえると、相似的に変化すると仮定する。たとえば、

$$f(\mu, t) = \frac{1}{l(t)} f\left(\frac{\mu}{l(t)}\right) \quad (25)$$

$$g(\lambda, t) = \frac{1}{l(t)} g\left(\frac{\lambda}{l(t)}\right) \quad (26)$$

$$g(\mu, \lambda, \mu', t) = \frac{1}{l(t)^3} g\left(\frac{\mu}{l(t)}, \frac{\lambda}{l(t)}, \frac{\mu'}{l(t)}\right) \quad (27)$$

である。

② 速度場を指定する各 ξ_i は x 軸上に、互に独立に、一様分布していると仮定する。即ち、 μ の分布は、 Γ -分布に従うものとする。すると、

$$f(\mu, t) = \frac{1}{l(t)} e^{-\frac{\mu}{l(t)}} \quad (28)$$

である。

③ 速度場を指定する各 ξ_i も x 軸上に、互に独立に、一様分布していると仮定する。即ち、 λ の分布も、 Γ -分布に従うものとする。すると、

$$g_n(\lambda, t) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)! l(t)^n} e^{-\frac{\lambda}{l(t)}} \quad (29)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。ただし、 $\{\eta_i\}$ の分布と $\{\xi_i\}$ の分布は独立ではない。

④西端のstep幅が $\beta\mu$ と $\beta\mu'$ であるという条件のもとでの、波長 λ の確率を $h_{\mu,\mu'}(\lambda,t)$ とすれば、

$$g(\mu,\lambda,\mu',t) = f(\mu,t) f(\mu',t) h_{\mu,\mu'}(\lambda,t) \quad (30)$$

であるが、速度場の空間的一様性から、大きい $\mu+\mu'$ には、それに正比例して大きい λ が対応するものと考えられる。そこで、

$$h_{\mu,\mu'}(\lambda,t) = \frac{1}{\mu+\mu'} h\left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right) \quad (31)$$

と仮定しておく。 $h\left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right)$ は次式を満たさなければならぬ。

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\mu+\mu'} h\left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right) = 1 \quad (32)$$

また h が時間 t を陽に含んでいないのは、self-preserving solutionのみを考えているからである。

すると、方程式(30)は、次のようになる。

$$g(\mu,\lambda,\mu',t) = \frac{1}{\mu+\mu'} f(\mu,t) f(\mu',t) h\left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right) \quad (33)$$

ところで、(19), (28), (29) 及び (33) 式が互に矛盾なく成立するためには、

$$h\left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right) = \begin{cases} 1 & (\lambda < \mu+\mu') \\ 0 & (\lambda > \mu+\mu') \end{cases} \quad (34)$$

でなければならぬことがわかる。

以上、(i), (ii), (iii), (iv) の仮定のもとで、(21), (22), (24) 式を解くと次のようになる。

$$l(t) = l_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \quad (35)$$

$$N(t) = N_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \quad (36)$$

$$f(\mu, t) = \frac{1}{l_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu}{l_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2}} \quad (37)$$

$$g(\lambda, t) = \frac{1}{l_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} e^{-\frac{\lambda}{l_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2}} \quad (38)$$

ただし、 $t = t_0$ で、 $l(t_0) = l_0$, $N(t_0) = N_0$ と $L = t_0$ 。

§. 6. エネルギーの計算

Burgers の方程式 (1) に、 u をかけて、 0 から L まで積分すると、大きい L に対しては、

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) \equiv \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2L} \int_0^L u^2 dx \right] \approx -\frac{1}{RL} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad (39)$$

となる。さて、 $R \rightarrow \infty$ のときには、右辺に寄与するのは、 $u(x, t)$ の不連続部分のみである。その部分は (2) より、

$$\xi_1 - \varepsilon < x < \xi_2 + \varepsilon \quad \text{では、} \quad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} u(x, t) \equiv -\frac{R\mu^2}{8t^2} \operatorname{cosh}^{-2} \frac{R\mu}{4t} (x - \xi_1) \quad (40)$$

である。これを使って右辺を計算すると、

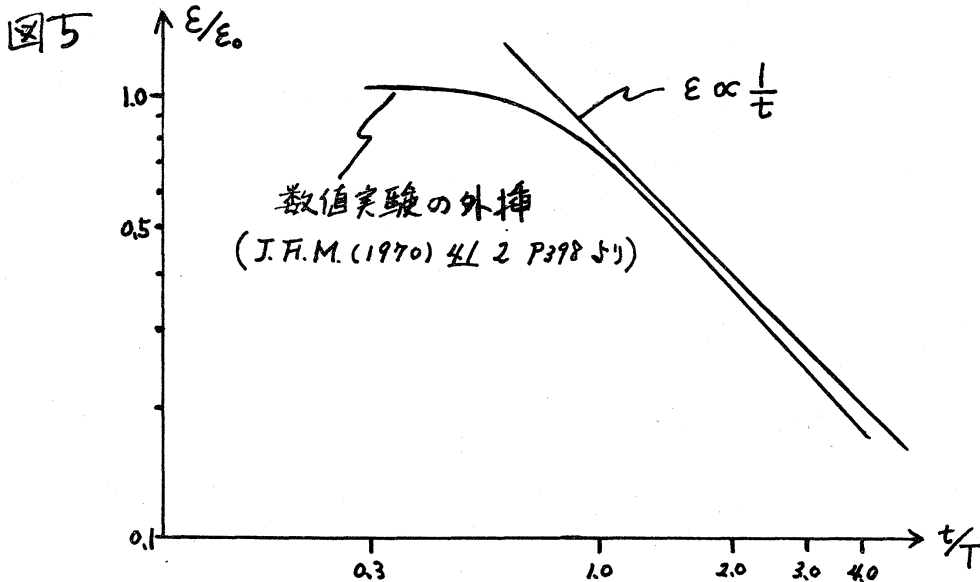
$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = -\frac{l_0^2}{2t_0} \cdot \frac{1}{t^2} \quad (41)$$

となり、 t について積分すれば、

$$\varepsilon(t) = \frac{l_0^2}{2t_0} \cdot \frac{1}{t} \quad (42)$$

となる。つまり、エネルギーは $\frac{1}{t}$ に比例して減衰するが

図5に示されているように数値実験との一致は良好である。



§7. 相関 $R(r, t)$ の計算

さて、速度相関 $R(r, t)$ を計算しよう。次の仮定をする。

① $\psi_i = \zeta_{i+1} - \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i+1})$ と定義すると、 ψ_i と λ_j は互に独立である。

② ψ_i の平均 $\langle \psi \rangle = 0$

③ ψ_i と ψ_j ($i \neq j$) は独立である。

④ 分布は i に関して一様である。

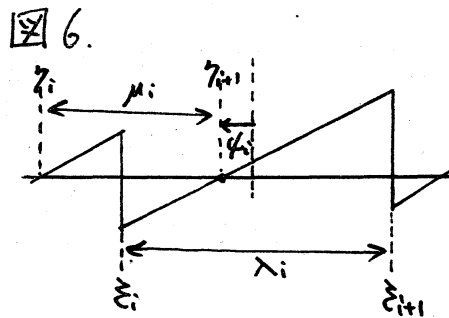
(即ち、 $\langle \psi_i^2 \rangle = \langle \psi_{i+j}^2 \rangle$ など)

このときには、

$$\langle \psi^2 \rangle = \frac{l(H)^2}{4} \quad (43)$$

であることが証明される。

速度相関 $R(r, t)$ は次のように書ける。



$$\begin{aligned}
 R(r, t) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) u(x+r, t) dx \\
 &= \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{1}{t^2} (x - \gamma_{i+1}) (x+r - \gamma_{i+j+1}) dx \\
 &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} R_j(r, t) \tag{44}
 \end{aligned}$$

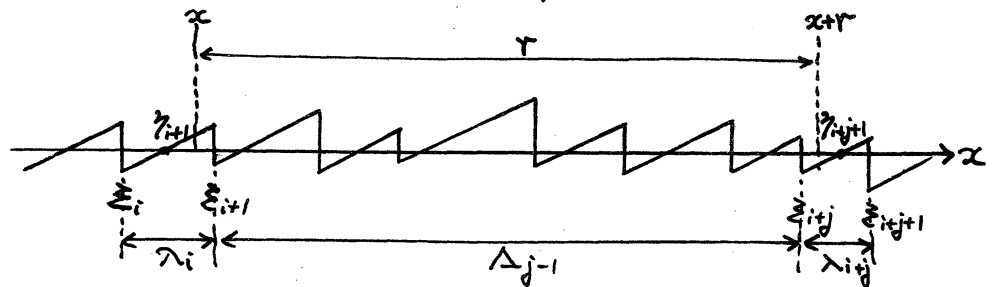
さて、 $R_j(r, t)$ ($j=0, 1, 2, \dots$) を計算しよう。

① $j=0$ の場合 ($r < \lambda_i$)

$$\begin{aligned}
 R_0(r, t) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{Lt^2} \sum_{(\lambda_i > r)} \int_{\xi_i}^{\xi_i - r} (x - \gamma_{i+1}) (x+r - \gamma_{i+1}) dx \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{Lt^2} \sum_i \int_0^{\lambda_i - r} (x - \psi_i - \frac{\lambda_i}{2}) (x+r - \psi_i - \frac{\lambda_i}{2}) dx \\
 &= \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N(t)}{Lt^2} \int_r^\infty d\lambda g(\lambda, t) \int_0^{\lambda - r} dx \left\{ (x - \frac{\lambda}{2}) (x+r - \frac{\lambda}{2}) + \langle \psi \rangle \right\} \\
 &= \frac{g(t)^2}{t^2} e^{-\frac{r}{g(t)}} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{g(t)} \right)^2 \right\} \tag{45}
 \end{aligned}$$

② $j \geq 1$ の場合 ($\Delta_{j-1} < r < \Delta_{j-1} + \lambda_i + \lambda_{i+j}$)

図 7.



$$R_j(r, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{Lt^2} \sum_i \int_D (x - \gamma_{i+1}) (x+r - \gamma_{i+j+1}) dx \tag{46}$$

($\Delta_{j-1} < r < \Delta_{j-1} + \lambda_i + \lambda_{i+j}$)

ここに、 x についての積分範囲 D は、 $\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$, λ_i

$\Xi_{i+j} \leq x+r \leq \Xi_{i+j+1}$ を同時に満す範囲である。

Δ_{j-1} の確率分布は (29) より。

$$g_{j-1}(\Delta_{j-1}) = \frac{\Delta_{j-1}^{j-2}}{(j-2)! l(t)^{j-1}} e^{-\frac{\Delta_{j-1}}{l(t)}} \quad (47)$$

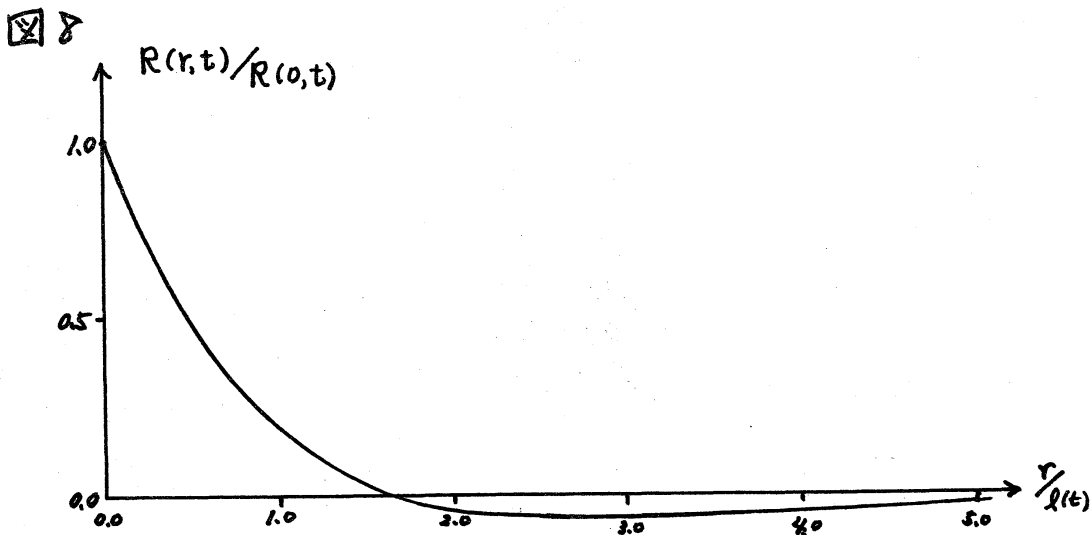
である。これを使って (46) 式を計算すれば。

$$R_j(r, t) = -\frac{l(t)^2}{t^2} e^{-\frac{r}{l(t)}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{j!} \left(\frac{r}{l(t)}\right)^j \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{r}{l(t)}\right)^{j+1} \\ +\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(j+2)!} \left(\frac{r}{l(t)}\right)^{j+2} \end{array} \right\} \quad (48)$$

となる。すると $R(r, t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} R(r, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} R_j(r, t) \\ &= \frac{l(t)^2}{t^2} e^{-\frac{r}{l(t)}} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l(t)}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l(t)}\right)^2 \right\} \quad (49) \end{aligned}$$

これを図示すると、図8のようになる。



§8. スペクトルの計算

エネルギー・スペクトル $E(k, t)$ は次式で定義される。

$$E(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(r, t) \cos kr \, dr \quad (50)$$

前節で求めた $R(r, t)$ を使うと、

$$E(k, t) = \frac{l(t)^3}{4\pi t^2} \frac{\{1 + 9(kl(t))^2 + 4(kl(t))^4\}}{\{1 + (kl(t))^2\}^3} \quad (51)$$

となる。

これを図示すると、図9のようになる。

