数理解析研究所講究録
第123巻 1971年 1-10

重確率行列の台と (0,1)-行列の定める複体について．

青山学院大 理工　岩堀信子

序．

この報告の前半は，組合せ解析（combinatorial analysis）における"結婚定理"のいわば解析的な別証明を与えることを目標とする．そのために導入された概念（D-対称性と超連結性）から，自然に後半の主題である $m\times n$ 型の $(0,1)$-行列 A, B の間の1つの同値関係："$A\sim B \overset{def}{\Longleftrightarrow} PAQ=B$ を満たす置換行列 P, Q が存在する"が考えられる．この同値性の判定条件として，重複度を考えた複体 $\mathcal{K}_A$ を A から作り，$A\sim B \Longleftrightarrow \mathcal{K}_A \cong \mathcal{K}_B$ を示す．その応用として，成分の総和が $2n+1$ であるような $n\times n$ 型の超連結な $(0,1)$-行列の同値類の個数を求めてみる．

§1．準備概念．D-対称と超連結性．

有限集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ を考え，Ω の部分集合全体のなす族を 2^{Ω} と書く．又，集合 S の濃度を $|S|$ と書く．$\Omega^2=$

$\Omega\times\Omega$ の部分集合 G に対して，$2^{\Omega}\times 2^{\Omega}$ の部分集合 $D(G)$ を

$$D(G)=\{(L,M)\in 2^{\Omega}\times 2^{\Omega};\ \phi\subsetneq L\subsetneq\Omega,\ \phi\subsetneq M\subsetneq\Omega,\ (L\times M)\cap G=\phi\}$$

で定義する．$D(G)$ を G の不連結化系と呼ぶ．そして，

$$d(G)=\underset{(L,M)\in D(G)}{Max}\{|L|+|M|\}$$

とおく．（$D(G)=\phi$ なら $d(G)=0$ とおく．）

定義 1.　Ω^2 の部分集合 G が $d(G)<|\Omega|$ を満たすとき G を超連結（super-connected）という．（このグラフ的意味は定理 7 参照．）

定義 2.　Ω^2 の部分集合 G が D-対称とは，$(L,M)\in D(G)$, $|L|+|M|=|\Omega|$ なる各 (L,M) に対し，$(L^c,M^c)\in D(G)$ となることをいう．（ただし L^c は L の補集合：$L^c=\Omega-L$）．

補題 1．Ω^2 中の D-対称集合 G $(G\neq\phi)$ は，各 $j\in\Omega$ に対し $G\cap(\{j\}\times\Omega)\neq\phi$，　$G\cap(\Omega\times\{j\})\neq\phi$　を満たす．

（証）容易につき略．

以下，n 次の行列 $A=(a_{ij})$ に対して

$$Supp(A)=\{(i,j)\in\Omega^2;\ a_{ij}\neq 0\}$$

で定義される Ω^2 の部分集合 $Supp(A)$ を，A の台（support）と呼ぶ．n 次 $(0,1)$-行列（成分が 0 か 1 の行列）の全体を $\mathcal{K}_n$ とし，写像 $\varphi:\mathcal{K}_n\longrightarrow 2^{(\Omega\times\Omega)}$ を，$\varphi(A)=Supp(A)$ で定義

すれば，φは全単射である．φにより，$\mathcal{X}_n$と$2^{(\Omega\times\Omega)}$を同一視し，(0,1)-行列についても，D-対称性と超連結性を定義する．

<u>補題 2.</u> $A\in\mathcal{X}_n$，$A\neq O$ とする．AがD-対称ならば，n次置換行列P，Qが存在して

$$PAQ=\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_r \end{array}\right) \quad ; \ A_1,\cdots,A_r \text{ は超連結}.$$

となる．

（証）Aが超連結でないなら，$G=Supp(A)$ とおくとき，$(L,M)\in D(G)$ が存在して $|L|+|M|\geqq n$ となる．LまたはMを適当な部分集合でおきかえて，$|L|+|M|=n$ としてよい．すると，$(L^c,M^c)\in D(G)$ となるから，置換行列P_1，Q_1が存在して，

$$P_1AQ_1=\begin{array}{|c|c|}\hline B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \\ \hline\end{array}$$

となる．補題1より $B_1\neq 0$，$B_2\neq 0$．しかもB_1，B_2もD-対称となることが容易にわかる．よってこの手続きをくり返せばよい（終）

§2. 非負行列の重確率行列化.

n次行列$D=(d_{ij})$において，$d_{ij}\geqq 0$ $(i,j=1,\cdots,n)$，$\sum_i d_{ij}$

$=1$, $\sum_j d_{ij}=1$ $(i,j=1,\cdots,n)$ が成り立つとき，D を重確率行列 (doubly stochastic matrix) という．

定理1. (R. Sinkhorn [1]) n 次行列 $T=(t_{ij})$ のどの成分も正ならば，正数を成分とする対角行列 $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ と $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$ が存在して，$\sum_i a_i=1$，かつ ATB は重確率行列となる．

(証) (古屋) $\mathbb{R}^n$ 中のコンパクト凸集合

$$K=\{(x_1,\cdots,x_n)\ ;\ x_i\geq 0,\ i=1,\cdots,n,\ \sum x_i=1\}$$

を考える．連続写像 $\varphi: K\longrightarrow K$ を次のように定義する：

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

ただし，$\eta_i=\left(\sum_j \zeta_j\right)^{-1}\zeta_i$，$\zeta_i=\left(\sum t_{ij}\rho_j\right)^{-1}$，$\rho_j=\left(\sum \xi_i t_{ij}\right)^{-1}$ $(i,j=1,\cdots,n)$. すると φ の不動点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ が存在する．

$$A=\mathrm{diag}(\xi_1,\cdots,\xi_n),\qquad B=\mathrm{diag}(\rho_1,\cdots,\rho_n)$$

が求めるものである．(終)

定理2. (R. Sinkhorn [2]) n 次行列 $T=(t_{ij})$ のどの成分も 0 か正とする．このとき，$\mathrm{Supp}(T)$ が Ω^2 の空でない D-対称な部分集合なら，正数を成分とする対角行列 $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ と $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$ が存在して，$\sum a_i=1$，かつ ATB は重確率行列となる．

(証) (新納) 補題2により，$\mathrm{Supp}(T)$ が超連結としてよい．成分がすべて 1 の n 次行列を F とし，$T^{(m)}=(t_{ij}^{(m)})=T+\frac{1}{m}F$

に定理1を用いて，正の成分をもつ対角行列 $A^{(m)}=diag(a_1^{(m)},\cdots,a_n^{(m)})$，$B^{(m)}=diag(b_1^{(m)},\cdots,b_n^{(m)})$ を見出して，$\sum a_i^{(m)}=1$，$A^{(m)}T^{(m)}B^{(m)}$ を重確率行列ならしめる．$\{m\}$ を必要に応じ部分列におきかえて，$\{a_i^{(m)}\}$，$\{b_i^{(m)}\}$，$\{a_i^{(m)}t_{ij}^{(m)}b_j^{(m)}\}$ がすべて（有限又は $+\infty$ の）極限値（それぞれ a_i，b_i，s_{ij} とする．）をもつとしてよい．

$I=\{i\in\Omega\ ;\ a_i>0\}$，$J=\{j\in\Omega;\ b_j=+\infty\}$ とおくと，$(I\times J)\cap Supp(T)=\phi$ がわかる．又 $(I^c\times J^c)\cap Supp(S)=\phi$ もわかる．（ただし，$S=(s_{ij})$ とする．）よって，

$$n-|J|=|J^c|=\sum_{j\in J^c}\sum_{i\in\Omega}s_{ij}=\sum_{j\in J^c}\sum_{i\in I}s_{ij}\leq\sum_{j\in\Omega}\sum_{i\in I}s_{ij}=|I|$$

即ち，$|I|+|J|\geq n$．これと $Supp(T)$ の超連結性から，$I=\Omega$，$J=\phi$ がえるから，$0<a_i<+\infty$，$0\leq b_i<+\infty$ $(i=1,\cdots,n)$ を得る．又 $b_j=0$ なる j があれば，$s_{ij}=a_it_{ij}b_j=0$ $(i=1,\cdots,n)$ となり，$\sum_i s_{ij}=1$．に反する．（終）

§3．結婚定理の証明．

<u>定理3.</u>（Birkhoff-von-Neumann）n次重確率行列Dは，いくつかの置換行列 $P_1,\cdots,P_r$ の凸1次結合である．

（証）（新納）Krein-Milman の定理により，n次重確率行列の全体のなすコンパクト凸集合をKとするとき，Kの端点は置換行列に限ることを言えばよい．これについては，数理科学，昭和44年9月号27頁を見られたい．（終）

<u>定理4.（結婚定理）</u> Ω^2の部分集合Gに対し，

$$d^*(G) = \mathrm{Max}\{|I|+|J| ;\ \phi \subsetneq I \subsetneq \Omega,\ \phi \subsetneq J \subsetneq \Omega,\ (I\times J)\cap G = \phi\}$$

とおく．すると，全単射 $f:\Omega\longrightarrow\Omega$ で $(i,f(i))\in G$ $(i=1,\cdots,n)$ を満たすものが（所謂 G-matching）が存在するための必要十分条件は，$d^*(G)\le|\Omega|$ である．

（注意）Ω の部分集合 I に対して，$I^*=\{j\in\Omega ; (i,j)\in G \text{ for some } i\in I\}$ とおくと，結婚定理の普通の形は，

$$\text{G-matching の存在} \iff |I^*|\ge|I|,\quad \forall I\in 2^\Omega$$

である．右辺の条件は $d^*(G)\le|\Omega|$ と同値であることは容易．

（証）$d^*(G)\le|\Omega|$ の必要性は上の注意から明らか．十分性を n での帰納法で示そう．$d^*(G)\le|\Omega|$ から，$n\le 2$ のときは，G-matching の存在が直ちにわかる．よって，$d^*(G)\le|\Omega|$, $n>2$ とする．まず $d^*(G)<n$ なら，$d(G)<n$ となり G は強連結．よって $G=\mathrm{Supp}(T)$ なる重確率行列 T がある（定理 2）．$T=\alpha_1P_1+\cdots+\alpha_rP_r$，$\alpha_1>0,\cdots,\alpha_r>0$，$\sum\alpha_i=1$，$P_1,\cdots,P_r$ は置換行列，と表わせば，P_i に対応する置換は G-matching である．

次に $d^*(G)=n$ とする．このとき $(I,J)\in D(G)$ が存在して，$|I|+|J|=n$ となる．よって，G に対応する $(0,1)$-行列 A の両側に置換行列 P, Q を適当に掛ければ，

$$PAQ = \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array}\!\!\begin{array}{cc} p & q \\ \left[\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline * & A_2 \end{array}\right. & \end{array} \qquad p=|I|,\quad q=|J|$$

の形になり，かつ $d^*(A_1)\le p$，$d^*(A_2)\le q$ となる．よって，

帰納法が使え，A_1，A_2 中に p 次，q 次の置換行列 X，Y が存在する．（i.e. $Supp(A_1) \supset Supp(X)$，$Supp(A_2) \supset Supp(Y)$ ）これを合せて G-matching の存在がわかる（終）

系．Ω^2 の部分集合 G が $d^*(G) < n$ を満たせば，G の各元 (i,j) に対して，$f(i)=j$ を満たす G-matching が存在する．

（証）$\Omega_1 = \Omega - \{i\}$，$\Omega_2 = \Omega - \{j\}$ とし，Ω_1 の各部分集合 J に対して，$J^* = \{q \in \Omega_2 ; (p,q) \in G \text{ for some } p \in J\}$ が $|J^*| \geq |J|$ を満たすことが直ぐわかる．よって，$\Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ なる G-matching がある．これと $i \to j$ を合わせればよい．（終）

<u>定理5</u>　n 次の $(0,1)$-行列 A に対し，次の条件は互いに同値である．

(i)　$Supp(T) = Supp(A)$ なる重確率行列 T がある．

(ii)　A は D-対称．

(iii)　置換行列 $P_1, \cdots, P_r$ が存在して $Supp(A) = \bigcup_{i=1}^{r} Supp(P_i)$.

(iv)　置換行列 P, Q が存在して

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_r \end{array}\right), \quad A_1, \cdots, A_r \text{ は完全結}$$

（証）(i) ⇒ (ii)：$\phi \subsetneq I \subsetneq \Omega$，$\phi \subsetneq J \subsetneq \Omega$，かつ $t_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in I \times J$ $|I| + |J| = n$ とすれば，

$$0 = n - |J| - |I| = |J^c| - |I| = \sum_{p \in \Omega} \sum_{q \in J^c} t_{pq} - \sum_{p \in I} \sum_{q \in \Omega} t_{pq}$$

$$= \sum_{p\in I^c}\sum_{q\in J^c} t_{pq} + \sum_{p\in I}\sum_{q\in J^c} t_{pq} - \sum_{p\in I}\sum_{q\in J^c} t_{pq} = \sum_{p\in I^c}\sum_{q\in J^c} t_{pq}.$$

$\therefore\ (I^c, J^c) \in D(Supp(A))$. よって A は D-対称.

(ii) $\Rightarrow$ (iv)：補題2. (iv) $\Rightarrow$ (iii)：定理4の系, (iii) $\Rightarrow$ (i)：$T = \frac{1}{r}(P_1 + \cdots + P_r)$ は求める重確率行列となる.

§4. $m\times n$ 型 $(0,1)$-行列の定める複体.

定義3. $m\times n$ 型 $(0,1)$-行列の全体を $\mathcal{X}_{m,n}$ とする. $\mathcal{X}_{m,n}$ の2元 A, B に対し, $A \sim B \iff$ 置換行列 P, Q が存在して, $PAQ = B$.

定義4. V を有限集合とする. 2^V の部分集合 Δ と V との対 (Δ, V) が頂点集合 V 上の複体とは, (i) $\Delta \ni X$, $X \supset Y \Rightarrow Y \in \Delta$, (ii) $\Delta \ni \{v\}$, $\forall v \in V$ を満たすことをいう.

複体 (Δ, V) において Δ から負でない整数の集合への写像 μ があって,

$$X \supset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$$

を満たすとき, μ を (Δ, V) 上の重複度関数といい, $\mu(\phi)$ を最大重複度と呼ぶことにする. 複体 (Δ, V) とその上の重複度関数 μ とを合わせた概念 $(\Delta, V; \mu)$ を重複度をもった複体という.

定義5. 重複度をもった2つの複体 $(\Delta_i, V_i; \mu_i)$ $(i=1,2)$ が同型 (記号 $(\Delta_1, V_1; \mu_1) \cong (\Delta_2, V_2; \mu_2)$) とは, V_1 から V_2 への全単射 f が存在して, f のひきおこす

写像 $f_*: 2^{V_1} \longrightarrow 2^{V_2}$ が $f_*(\Delta_1)=\Delta_2$ を満たし，かつ，各 $A\in\Delta_1$ に対して，$\mu_1(A)=\mu_2(f_*(A))$ が成り立つことをいう．

さて，$A=(a_{ij})\in\mathcal{K}_{m,n}$ に対して，次のように重複度をもった複体 $(\Delta_A, V_A; \mu_A)$ を対応させる．$\Omega=\{1,\cdots,n\}$ とし，まず写像 $\tilde{\mu}_A: 2^{\Omega}\longrightarrow\{0,1,\cdots,m\}$ を次のように定義する：Ω の部分集合 J に対し，$J=\phi$ なら，$\tilde{\mu}_A(J)=m$ とし，$J\neq\phi$ なら，$\prod_{j\in J} a_{ij}=1$ となる i の個数を $\tilde{\mu}_A(J)$ とおく．そして，

$$\Delta_A=\{J\in 2^{\Omega}\ ;\ \tilde{\mu}_A(J)>0\}$$
$$V_A=\{j\in\Omega\ ;\ \tilde{\mu}_A(\{j\})>0\}$$

とおく．最後に $\tilde{\mu}_A$ を Δ_A に制限した写像を μ_A とおく．

定理 6. $A, B\in\mathcal{K}_{m,n}$ に対して，$A\sim B$ なるための必要十分条件は，$(\Delta_A, V_A; \mu_A)\cong(\Delta_B, V_B; \mu_B)$ である．

（証）略．

定理 6 を利用して，例えば次のような問題を解くことができる．n 次 $(0,1)$-行列で強連結，かつ 0 でない成分の個数が $2n+1$ なるもの全体の集合を $\mathcal{M}$ とし，$\mathcal{M}$ を上の $\sim$ で同値類に分割する．$\mathcal{M}$ はいくつの同値類に分れるか？　答．$\left[\frac{n-1}{2}\right]$

§5. 付記

定理 7. n 次 $(0,1)$-行列 A について，次は互いに同値である．

(i) A は超連結

(ii) 任意の置換行列 P, Q に対して，PAQ の定める有向グラフは強連結（strongly connected）である．

(iii) $\mathrm{Supp}(A) \supset \mathrm{Supp}(P)$ を満たす置換行列 P の全体の集合を $\mathfrak{P}(A)$ とおくと，$\{PQ^{-1} ; P, Q \in \mathfrak{P}(A)\}$ が生成する $\mathfrak{S}_n$（n 次対称群）の部分群は $\{1, \cdots, n\}$ 上に可移的である．

定理7と定理4の系により，次の手続きにより，n 次の超連結な (0,1)-行列がすべて求められることがわかる：(イ) $\{1, \cdots, n\}$ 上に可移的な $\mathfrak{S}_n$ の部分群 $\mathfrak{g}$ を任意に1つとる．(ロ) $\mathfrak{g}$ の生成系 $\mathfrak{a}$ $(\ni 1)$ を任意に定める．(ハ) $\mathrm{Supp}(A) = \bigcup_{P \in \mathfrak{a}} \mathrm{Supp}(P)$ で定まる (0,1)-行列を $A = A(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ とおく．すると，A は超連結となる．逆に，

定理8. 任意の n 次の超連結な (0,1)-行列 B に対し，上のような $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ と置換行列 P, Q が存在して，$B = P \cdot A(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) Q$ となる．

参考文献

[1]. R. Sinkhorn, A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices, Ann. Math. Statist. 35, 1963.

[2]. R. Sinkhorn, P. Knopp, Concerning non-negative matrices and doubly stochastic matrices, Pacific Jou. of Math. vol. 21, 1967.