

グラフ $G(X, P)$ の概念と連結行列 A

慶応義塾大学 竹中淑子

有向グラフ $G(X, P)$ のいろいろの定義を $G(X, P)$ に対応する連結行列 A を用いて系統的に表現するに、この表現を用いて *Hamiltonian circuit* の存在に関する定理を求めるに、この一つの応用として チェスのナイトの旅に関する *Euler* 問題の解の存在を示めることが目的である。なおこれらは参考文献 [2], [3] によるものである。

§1. 連結行列 A を用いての表現

有向グラフ $G(X, P)$, $|X| = n$ において 連結行列 $A = (a_{ij})$

は

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : (x_i, x_j) \in U \\ 0 & : (x_i, x_j) \notin U \end{cases} \quad \dots (1)$$

で与えられる。ここに U は $G(X, P)$ の arc の全体である。

A の行ベクトルを a_1, a_2, \dots, a_n , 列ベクトルを a^1, a^2, \dots, a^n で表わす。演算はすべて Boolean addition $+$ と Boolean multiplication \times にておこなうこととし この A に対し $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$ を定義する。 I, E はそれぞれすべての元が 1 の n 次ベクトル, $n \times n$ 行列とし

$$A^0 = \sum_{i=1}^n A^{(i)}, \quad |A| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad |a_i| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \dots (2)$$

とおく。 (a_1, a_2, \dots, a_n) の置換を σ で表わし そのときの行列を $A(\sigma)$ とする。 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に対し $J_X = \{1, 2, \dots, n\}$ と表わす。

(i) 型, arc, path, 基本的数に関するもの。

| | graph $(X, P), X = n$ | incidence matrix A |
|---|---|---|
| 1 | simple | $\exists \sigma; A(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ |
| 2 | complete | $A + A^T = E$ |
| 3 | connected | $\sum_{i=1}^n A^{(i)} = E$ |
| 4 | transitive | $\exists k > 0; a_{ij}^{(k)} = 1 \Rightarrow a_{ij} = 1$ |
| 5 | $\begin{cases} \exists \text{ arc } (x_i, x_j) \\ \text{otherwise} \end{cases}$ | $a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ |
| 6 | $\begin{cases} \exists \text{ path } (x_i, \dots, x_j) \text{ of length } k \\ \text{otherwise} \end{cases}$ | $a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} \exists \text{ circuit } (x_i, \dots, x_i) \text{ of length } k \\ \text{otherwise} \end{cases}$ | $a_{ii}^{(k)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ |

| | | |
|----|--|---|
| 8 | \exists perfect matching | \exists partial graph $(X, \mathcal{P}'), B;$ $ B = n$ $ b_i = b_j = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2)$ |
| 9 | \exists Hamiltonian path | $\exists \sigma; a_{i, i+1}(\sigma) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$ |
| 10 | \exists Hamiltonian circuit | $\exists \sigma; a_{i, i+1}(\sigma) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), a_{n, 1}(\sigma) = 1$ |
| 11 | \exists arborescence with root x_i | $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(j)} = I$ |
| 12 | connected component p | $\exists \sigma; A(\sigma) = \left[\begin{array}{c} E \\ \vdots \\ E \end{array} \right]_p$ |
| 13 | cyclomatic number $\nu(G)$ | $\nu(G) = A - n + p$ |
| 14 | chromatic number p | $\exists C^*(\sigma); \sigma_{ii}^*(\sigma) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ |

(表 1)

(ii) X の部分集合 S に関するもの。

| | set $S \subset X$ | incidence matrix A |
|----|-------------------|----------------------|
| 15 | internally stable | $A Y_1 = Y_4$ |
| 16 | externally stable | $A Y_3 = Y_5$ |
| 17 | kernel | $A Y_1 = Y_2$ |
| 18 | base | $A^0 Y_1 = Y_2$ |
| 19 | support | $A Y_2 = Y_1$ |

(表 2)

こゝに Y_1, Y_2, \dots, Y_5 は n 次元ベクトルで 次の条件をみたすものとする。*は1又は0で任意。

| | at J_S | at $J_S^c (= J_{X-S})$ |
|-------|----------|------------------------|
| Y_1 | 1 | 0 |
| Y_2 | 0 | 1 |
| Y_3 | 1 | * |
| Y_4 | 0 | * |
| Y_5 | * | 1 |

(表 3)

§ 2. Hamiltonian circuit の存在について.

[Lemma 1] ある整数 p と k ($1 < k+p \leq n$) があって $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$, ..., $A^{(k+p-1)}$ は

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = I \quad \dots (3)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} A^{(k+i)} = E \quad \dots (4)$$

をみたす p 個のベクトル a_0, a_1, \dots, a_{p-1} より成るならば

$$A^{(k+p_i)} = A^{(k)}$$

$$A^{(k+1+p_i)} = A^{(k+1)}$$

$$i = 1, 2, \dots \quad \dots (5)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A^{(k+p-1+p_i)} = A^{(k+p-1)}$$

である。すなわち

$$\sum_{n=0}^{p-1} A^{(k+p_i+n)} = E \quad i = 1, 2, \dots \quad \dots (6)$$

である。

[Theorem 1] グラフ $G(X, P)$, $|X|=n$ が 次の条件(i)~(ii) をみたすならば Hamiltonian circuit をもつ。

(i) $\forall S \subset X$ に対し

$$|PS| \geq |S|. \quad \dots (7)$$

(ii) ある整数 p と k ($1 < p+k \leq n$) があって $A^{(k)}, A^{(k+1)}, \dots, A^{(k+p-1)}$ は

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = I \quad \dots (8)$$

$$|a_i| = \frac{n}{p} \quad (i=0, 1, \dots, p-1) \quad \dots (9)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} A^{(k+i)} = E \quad \dots (10)$$

をみたすベクトル a_0, a_1, \dots, a_{p-1} より成る。ただし

p は n の約数とする。

[Theorem 2] グラフ $G(X, P)$, $|X|=2n$ が Hamiltonian circuit をもつための必要十分条件は 次の(i)~(iii)をみたすことである。

(i) $\exists Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ ($2n$ 次元ベクトル) ;

$$AZ_1 = Z_2 \quad \dots (11)$$

$$AZ_3 = Z_4 \quad \dots (12)$$

$$|Z_1| = n \quad \dots (13)$$

$$Z_1 + Z_2 = I \quad \dots (14)$$

$$Z_1 + Z_3 = I \quad \dots (15)$$

$$Z_3 + Z_4 = I \quad \dots (16)$$

$$Z_1' \cdot Z_3 = 0 \quad (2+3-1) \quad \dots (17)$$

(ii) $\forall S \subset X$ に対し

$$|S \cap X_1| \leq |\pi S \cap X_2| \quad \dots (18)$$

$$|S \cap X_2| \leq |\pi S \cap X_1| \quad \dots (19)$$

ただし X_1 は Z_1 の 0 に対応する X の点, X_2 は Z_1 で 1 に対応する X の点.

(iii) (i) (ii) より 存在の保障される 2 組の matching を

$$(x_1, x_{i_1}), (x_2, x_{i_2}), \dots, (x_n, x_{i_n}) \quad \dots (20)$$

$$(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}), \dots, (x_{i_n}, x_{j_n}) \quad \dots (21)$$

とするとき (j_1, j_2, \dots, j_n) は $(1, 2, \dots, n)$ の巡回置換となる。

§3. チェスのナイトの旅に関する Euler 問題の解の存在の証明。

Euler 問題というのは チェス盤上のナイトを 1 つのます目を 1 回そして唯一回通るように動かすことができるかいなかということである。この問題に対し 実際には解をみつける手順はいくつかみつけられていすが、それらの理論的根拠がなかった。(cf. [1]) ここではすでに述べた [定理 1], [定理 2] を使って Euler 問題が解をみつことを証明する。

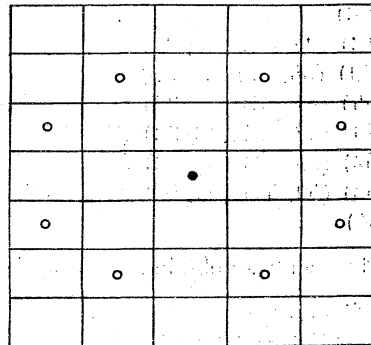
チェス盤に 図1の如く 1 から 64まで番号をつける。 $X = \{1, 2, \dots, 64\}$ とし、 $P(x)$ を各 $x \in X$ に対し 1 step でいける番号とする。(cf. 図2) すなわち

$$\begin{aligned}
 P(1) &= [11, 18] \\
 P(2) &= [12, 17, 19] \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

と定義する。このとき Euler 問題の解の存在は このグラフ $G(X, P)$ の Hamiltonian circuit の存在と同値である。

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | 57 |
| 2 | 10 | 18 | 26 | 34 | 42 | 50 | 58 |
| 3 | 11 | 19 | 27 | 35 | 43 | 51 | 59 |
| 4 | 12 | 20 | 28 | 36 | 44 | 52 | 60 |
| 5 | 13 | 21 | 29 | 37 | 45 | 53 | 61 |
| 6 | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | 54 | 62 |
| 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 |

(図1)



(図2)

(i) [定理1]による解の存在の証明

グラフ $G(X, P)$ に対応する連結行列を A とする。このとき $k=5, p=2$ で

$$\begin{aligned}
 a_0 &= (01010101101010100101010 \\
 &\quad 11010101001010101101010 \dots(23) \\
 &\quad 100101010110101010)
 \end{aligned}$$

$$a_1 = I - a_0 \quad \dots (24)$$

である。すなわち

$$A^{(5)} + A^{(6)} = E \quad \dots (25)$$

で $A^{(5)}$ において a_0 より成る行ベクトルの番号は

$$2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 34, 36, 38, 40, \dots (26)$$

$$41, 43, 45, 47, 50, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 63$$

a_1 より成る行ベクトルの番号は

$$1, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 33, \dots (27)$$

$$35, 37, 39, 42, 44, 46, 48, 49, 51, 53, 55, 58, 60, 62, 64$$

また (26) と (27) との間には 次のような matching がある。

$$(1, 11) \quad (2, 19) \quad (3, 9) \quad (4, 14) \quad (5, 15) \quad (6, 12) \quad (7, 13)$$

$$(8, 23) \quad (9, 26) \quad (10, 4) \quad (11, 17) \quad (12, 2) \quad (13, 3) \quad (14, 8)$$

$$(15, 32) \quad (16, 6) \quad (17, 27) \quad (18, 1) \quad (19, 25) \quad (20, 5) \quad (21, 31)$$

$$(22, 28) \quad (23, 29) \quad (24, 7) \quad (25, 10) \quad (26, 20) \quad (27, 21) \quad (28, 18) \dots (28)$$

$$(29, 35) \quad (30, 21) \quad (31, 16) \quad (32, 22) \quad (33, 43) \quad (34, 49) \quad (35, 41)$$

$$(36, 30) \quad (37, 47) \quad (38, 44) \quad (39, 45) \quad (40, 55) \quad (41, 58) \quad (42, 36)$$

$$(43, 37) \quad (44, 34) \quad (45, 60) \quad (46, 40) \quad (47, 64) \quad (48, 38) \quad (49, 59)$$

$$(50, 33) \quad (51, 42) \quad (52, 52) \quad (53, 53) \quad (60, 50) \quad (61, 51)$$

$$(62, 56) \quad (63, 46) \quad (64, 54)$$

したがって 求める Hamiltonian circuit μ は

$$\mu = [1, 11, 17, 27, 21, 31, 16, 6, 12, 2, 19, 25, 10, 4, \\ 14, 8, 23, 29, 35, 41, 58, 52, 62, 56, 39, 45, 60, \dots(29) \\ 50, 33, 43, 37, 47, 64, 54, 48, 38, 44, 37, 49, 59, \\ 53, 63, 46, 40, 55, 61, 51, 57, 42, 36, 30, 24, 7, \\ 13, 3, 9, 26, 20, 5, 15, 32, 22, 28, 18]$$

(ii) [定理 2] による解の存在の証明

$$Z_1 = Z_4 = a_0 \quad \dots(30)$$

$$Z_2 = Z_3 = a_1$$

となる。(あとは略)

REFERENCES

- [1] C. Berge, (1962), "The Theory of Graphs and its Applications,"
English translation by Alison Doig, Methuen, London, and
Wiley, New York.
- [2] Y. Takenaka, (1968), On the existence of a Hamiltonian
path in a graph, Inform. Contr. 13, No. 6, 555-564
- [3] Y. Takenaka, (1970), Graph theoretic concepts and the
incidence matrix, Inform. Contr. 17, No. 2, 113-121