

Foliation に関する問題

東大 大学院 水谷 忠良

Foliation に関する主な問題と、最近の主要結果をのべる。

§1. 定義

[定義] $\Gamma(E)$ が topological space E の pseudo-group of transformations であるとは、次の条件をみたす時をいう。

- 0) $\Gamma(E) = \{(\varphi, U) \mid U \text{ は } E \text{ の open set, } \varphi: U \rightarrow \varphi(U) \text{ は homeomorphism (or diffeom. etc)}\}$
- 1) $(\text{id}, U) \in \Gamma(E)$
- 2) (φ, U) が $\Gamma(E)$ の元ならば、 $V \subset U$; open に対して、 $(\varphi|_V, V)$ も $\Gamma(E)$ の元である。
- 3) $U = \bigcup U_\alpha$, $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ homeo. であるとして、 $(\varphi|_{U_\alpha}, U_\alpha)$ が $\Gamma(E)$ の元ならば、 (φ, U) も $\Gamma(E)$ の元となる。
- 4) (φ, U) $(\psi, \varphi(U))$ が $\Gamma(E)$ に属するならば、

$(\varphi \circ \varphi, U)$ も $\mathcal{P}(E)$ に属する。

5) $(\varphi, U) \in \mathcal{P}(E)$ ならば $(\varphi^{-1}, \varphi(U)) \in \mathcal{P}$ である。

Γ_n を \mathbb{R}^n の local diffeomorphism 全体の作る pseudogroup とする。

$\Gamma_{n,q} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q \ni (x, y)$ の local diffeomorphism で $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ なる形のものを generate される sub-pseudogroup とする。

[定義] Differentiable manifold M が codimension q の foliated structure をもつとは、 M の coordinate chart $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ が存在して、coordinate transformations が $\Gamma_{n,q}$ 内にとれる時をいう。

[同値な定義]

M が foliated structure をもつとは、local な differentiable submersions (f_i, U_i) ($\{U_i\}$ open covering of M) $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ が存在し、 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ならば、local な diffeomorphism h_{ji} が存在して次の diagram が local に commute する。

$$\begin{array}{ccc}
 U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R}^q \\
 & \searrow f_j & \downarrow h_{ji} \\
 & & \mathbb{R}^q
 \end{array}$$

又 Frobenius の定理を考へれば、codimension q の foliation は $(\dim M - q)$ -次の integrable な plane field であるといつてもよい。いづれにしても直観的には、与えられた manifold を "locally trivial" に $(n - q)$ -dim の submanifold の族で分割することである。この submanifold の component を leaf という。

良く知られた foliation の例に Reeb の foliation がある。又 Fibre bundle の total space も簡単な例に有つてゐる。

§2 Holonomy of a leaf

与えられた foliation の 1 つの leaf の近くでの様子をあらわすのが holonomy group である。 $G_q(0)$ を R^q の $0 \in 0$ に写す、local diffeomorphism の germ のつくる群とする。Codim = q の foliation と 1 つの leaf L が与えられた時、 $L \ni x_0$ におい t transversal な disk $D(x_0)$ をとる。 (L, x_0) の loop に対して、 $D(x_0) \ni y$ の像 γ を通る ~~curve~~ leaf 上の curve で、初めの loop を cover するものが、 $D(x_0)$ と再び交わる点とする。これによつて、 $\pi_1(L, x_0) \xrightarrow{\cong} G_q(0)$ なる map が定まる。これは leaf L の holonomy という。[詳しくは、Haefliger [2]]。

Holonomy に関して次のような定理がある。

定理 (Reeb [7])

M を compact, connected な manifold として、codimension 1 の foliation をもつとする。今、一つの leaf L が compact として、その基本群が finite であるとする。この時すべての leaf は compact として、その基本群は finite になる。

系) M simply-connected, compact manifold として、

$\partial M \neq \emptyset$, connected, simply-connected であるとする。この時 M は、 $\partial M \in$ 一つの leaf とするような foliation \mathcal{F} を与える。

以上のように M があることは leaf の基本群が、重要な役割りを果たしていることがわかる。

命題. $S^1 \times M$ は codimension 1 の foliation \mathcal{F} をもつ。

$\partial M \neq \emptyset$ の時は $S^1 \times \partial M$ が、leaf の有限個の和になる。

§3 問題.

まず foliation の存在に関連して次のような問題が上げられる。

1. M が $(n-q)$ -dimension plane field ξ をもつば、
codimension q の foliation が作れるか？

特に奇数次元 compact manifold に codimension 1
の foliation が作れるか？ S^{2n+1} についてはどうか？

2. $(n-q)$ dimensional plane field は、 ξ の foliation
即ち integrable field, に homotopic か？

3. M が foliation ξ をもつ時 $(n-q)$ -dimension plane
field は foliation に homotopic か？

1. に関して Lawson は、Milnor の fibration theorem
を用いて、次の定理を証明した。

定理 [Lawson [4)]

S^{2k+3} は codimension 1 の foliation ξ をもつ。 $k \geq 1$ 。

2. と 3. に関して Bott は、curvature form と chern
class を表わし、次の結果を得た。

定理 (R. Bott [1])

M oriented manifold. $\eta \in (n-q)$ -dim field.
 $R^*(\tau_M/\eta) \otimes H^*(M)$ の subring τ . τ_M/η

の Pontrjagin class により生成されるものとする。

η が M の foliation に homotopic であると仮定すれば

$$R^j(\tau_M/\eta) = 0 \quad j > 2g. \quad \text{である.}$$

特に $\dim M = 3$ の時は, Novikov らにより codimension 1 の foliation の存在は知られている。Wood は 次の定理を証明した。

定理 (Wood [9])

M^3 の codim 1 の plane field は foliation に homotopic である。

次に leaf の topology に関連して。

4. S^3 の codim 1 の foliation は compact leaf をもつ。

(Kneser の Conjecture)

5. S^3 の codim 2 の foliation は compact leaf をもつ。

(Seifert conjecture)

6. S^3 に exceptional leaf があるか?

7. M に dense な leaf がある時はいつか?

などの問題が考えられる。

4 は Novikov によって、肯定的にとかれた。Novikov の定理は、他の 3-manifold に対しても、Conjecture が正しい

ことを示している。

定理 (Novikov [6])

M^3 : orientable. $S^1 \times S^2 \neq M$. M の universal cover \tilde{M} が non-contractible であるとする。この時、 M の codim 1 の foliation は $S^1 \times D^2$ の Reeb foliation を含む。

5 は未解決の有名な問題である。

6 について、最近次のような結果が得られてきている。

定理 (Rosenberg - Roussaire [8])

$M^3 \in C^\infty$, orientable, closed manifold とする。

M^3 は exceptional leaf をもつ Codim 1 の foliation

をもつ。

Open manifold 上の foliation の研究については、submersion theory (Gromov - Phillips) が有効である。

定理 (Gromov - Phillips)

X を open manifold, \mathcal{F} を M 上の foliation とする。

$\text{Tr}(X, \mathcal{F})$ を \mathcal{F} に transversal な differentiable map 全体とする。この時

$\text{Tr}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\pi \circ d} \text{Epi}(TX, \nu \mathcal{F})$ は weak homotopy equivalence である。(但し、 $\nu \mathcal{F}$ は \mathcal{F} の

"normal bundle" d は differential, π は $TM \longrightarrow Y$ の projection とする。)

[定義] T_q -structure on X とは次のものである。

(0) X は topological space.

X に対し、 \exists 対 $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ が存在して次の性質をもつ。

(1) U_i は X の open covering である。

(2) $f_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^q$ は local projection と呼ばれる continuous map である。

(3) γ_{ij} は \mathbb{R}^q の C^∞ -local diffeomorphism である。

$x \in U_i \cap U_j$ の時、次の diagram が commute する。

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R}^q \\ & \searrow f_j & \downarrow \gamma_{ji}^x \\ & & \mathbb{R}^q \end{array} \quad \text{x の近傍で commute.}$$

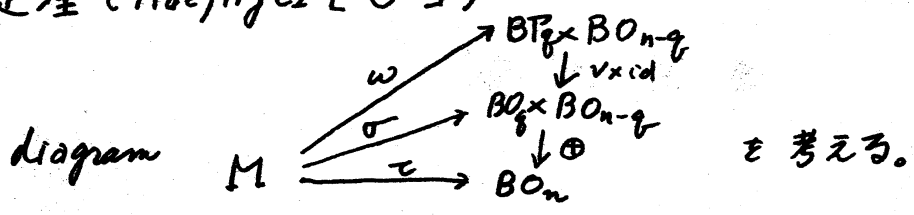
(4) $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ の時、

$$\gamma_{ki} = \gamma_{kj} \circ \gamma_{ji} \quad f_i(x) \text{ の近傍で.}$$

A. Haefliger は E. H. Brown の定理を用いて、 T_q -structure に対して classifying space が存在することを示した。(これを BT_q とかく)

さらに Gromov - Phillips の定理を応用して open manifold M 上の foliation の I-homotopy class を 次のような形で分類した。

定理 (Haefliger [3])



M が open manifold の時 Codim q の foliation の I-homotopy class は τ の lifting ω の homotopy class に 1:1 に対応する。

従って 当然 $B\Gamma_q$ の homotopy type が 重要になってくる。

B. $B\Gamma_q$ の homotopy type を 調べよ。

これら二つの定理としては

定理 (Haefliger [3])

$$B\Gamma_q \xrightarrow{\nu} B O_q \text{ は } q+1\text{-connected.}$$

定理 (Mather [5])

$$\pi_2(B\Gamma_1^x) \cong \frac{G^x}{[G^x, G^x]}$$

但し G^x は R^1 の C^x -diffeomorphism の support が

compact のものである。

特に $x=0$ の時 $\pi_2(BP_1^0) = 0$ である。

参考文献

1. R. Bott, On a topological obstruction to integrability, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 16 Amer. Math. Soc. '70.
2. A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), 367-397.
3. ———, Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology 9 (1970), 183-194.
4. B. Lawson, Codimension-one Foliations of Spheres, (preprint)
5. J. Mather, Bull. of Amer. Math. Soc. (to appear)
6. S. P. Novikov, The Topology of foliations, Trans. Moscow Math. Soc. 1965, 268-304.
7. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Act. Sc. Ind. (1952).
8. Rosenberg.-Roussaire. Les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles, Comm. Math. Helv. (1971) 517-523.

9 J. Wood : *Foliations on 3-manifolds*. *Ann. of Math.* 89 (1969) 336 - 358.