数理解析研究所講究録
第127巻 1971年 96-106

5次元多様体における三角形分割可能性のホモトピー不変性の問題

東大理　松本幸夫

§1. 序

一楽[3]は6次元以上の位相多様体の三角形分割可能性がホモトピー不変でないことを示す多くの例を作る方法を与えた。しかし彼の方法は5次元においては使えない。その主な理由は次の定理(Sullivan-Kirby-Siebenmann)[4]が5次元ではなりたたないことによる。

定理 S-K-S : Q^mを non-compact, $m \geq 6$, $\pi_1(Q)=0$ かつ $H^4(Q:\mathbb{Z})$が 2-torsion をもたない多様体とせよ。Q^m上の任意の2つの PL-structures Θ, Σ に対して proper homotopy $h_t : Q \to Q$ が存在して $h_0 = id$ かつ $h_1 : \Sigma \to \Theta$ PL-homeo となる。

この定理S-K-Sが5次元で成立しない反例として $Q^5 = S^3 \times R^2$ がある。すなわち $H^3(S^3 \times R^2 : \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ で分類される2つの PL-structures は互いに PL-homeo ではない。(福原[1]を見よ。) また福原[1]は $Q^5 = S^1 \times S^3 \times R$ 上の2つの PL-structures も互いに PL-homeo では

ないことを示した。この例では $\pi_1(Q^5)\neq 0$ ゆえ直接に定理S-K-Sの反例とはいえないが、実はこの $S^1\times S^3\times R$ に対して定理S-K-Sが成立しないことが直接に一楽の方法をfailさせるのである。このような5次元の特殊事情により、5次元においては三角形分割可能性がホモトピー不変ではなかろうか？という予想が生まれる。それを支持するいくつかの例をあげよう。

例1.（福原[1]）$S^1\times S^4$ にホモトピー同値な多様体は三角形分割可能である。

例2（Siebenmann[ ]）X^4を $w_1(X^4)=w_2(X^4)=0$, $\mathrm{index}(X^4)=8$ をみたすホモロジー多様体とする。$X^4\times S^1$ とホモトピー同値な5次元位相多様体 M_0^5 が存在する。明らかに M_0^5 と同じホモトピー型をもつ多様体は三角形分割できない。（古典的Rohlinの定理）

例3（自明）単連結5次元多様体及びホモトピーレンズ空間で $\pi_1=$ odd cyclic なものは全て三角形分割可能。これは $H^4(M:\mathbb{Z}_2)\cong H_1(M:\mathbb{Z}_2)=0$ より明らか。

例4（Hsiang-Wall [21]）ホモトピー T^5（証明にギャップがあるが§4で再証明する．§4 注意1.）

しかし実は π_1 に2-torsionがあると反例がある．

例5（Siebenmann）5次元ホモトピー実射影空間で三角形分

割できないものがある。(森田[5]を見よ。)

さて基本群は例1. $\pi_1=\mathbb{Z}$, 例2. $\pi_1=\mathbb{Z}$, 例3. $\pi_1=0$ or odd, 例4. $\pi_1=$ free abelian, 例5. $\pi_1=\mathbb{Z}_2$. このような考察から、$\pi_1=$ abelian without 2-torsion であるような5次元多様体の三角形分割可能性はホモトピー不変であるという予想が成立ちように思われる。はじめ例4にあげた Hsiang-Wall の主張を使ってこの予想を証明したが、彼等の主張(証明なし)につけた証明のギャップを服部先生から指摘され、あとでこの主張が誤まりらしいことに気づいた。(§2). しかし我々の予想は付帯条件 $H^2(M:\mathbb{Z}_2)=0$ をつけることによって証明される。(§3)

§2. ホモトピー~~の議論~~

自然な写像 ρ : BSpinTop→BSTop が $H^4(\mathrm{BSTop}:\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\xrightarrow{\times 2}\mathbb{Z}=H^4(\mathrm{BSpinTop}:\mathbb{Z})$ を導くことが知られている。前の $\mathbb{Z}$ の generator は 1-st Pontrjagin class p_1 で、あとの $\mathbb{Z}$ の generator は q_1 とかかれる。$H^4(\mathrm{BSTop}:\mathbb{Z}_2)$ の中には Kirby-Siebenmann class k がある。Kirby-Siebenmann により5次元以上の(かんたんのため oriented)多様体 M^m について、$\tau: M^m\to \mathrm{BSTOP}$ を接バンドルの classifying map とするとき、M^m: triangulable $\Leftrightarrow \tau^*k=0$ が知られている。τ^*k を k_M と書こう。さて $p:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{24}$ を projection, $i:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_{24}$ を12への inclusion とし、p_*, i_* でそれぞれの係数を持った Cohomology

群の間に導びかれた準同型を表わす。自然な写像 $\nu: F/Top \to BSTop$ は一意的に $F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSpinTop$ に lift する。次の定理がこの§の目標である。

定理 1. $p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k = i_* k_2^2 \quad \in H^4(F/Top\,;\, \mathbb{Z}_{24})$. ただし, $k_2 \in H^2(F/Top : \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ は generator.

位相空間 X に対して $X\langle n\rangle$ で X の $(n-1)$-conn. fibration をあらわす。i.e. $\varpi : X\langle n\rangle \to X$ は fibre map で、$\pi_i(X\langle n\rangle) = 0$ for $i < n$, そして $\varpi_* : \pi_i(X\langle n\rangle) \xrightarrow{\simeq} \pi_i(X)$ $i \geq n$. 例えば $BSTop\langle 4\rangle = BSpinTop$
定理の左辺は合成 $\varphi : F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSTop\langle 4\rangle \to BSF\langle 4\rangle$ が $F/Top \to BSF\langle 5\rangle$ に lift できるかどうかの obstruction になっている。はじめに、この合成 φ が $BSF\langle 5\rangle$ に lift していないことを示す。すなわち次の補題である。

補題 1 $p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k \neq 0$

証明：もしも合成 $\varphi : F/Top \to BSF\langle 4\rangle$ が $BSF\langle 5\rangle$ に lift したとすれば φ は $F/Top \xrightarrow{\tilde{\varphi}} BSF\langle 5\rangle \to BSF\langle 4\rangle$ と分解するが, $BSF\langle 5\rangle$ は 4-connected ゆえ、任意の 4 次元複体 X^4 と任意の map $f: X^4 \to F/Top$ に対して合成 $X^4 \xrightarrow{f} F/Top \xrightarrow{\varphi} BSF\langle 4\rangle$ は null-homotopic のはず。ところが次の[例]はこのことが正しくないことを示している。ゆえに $p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k \neq 0$.

[例] map $h : \mathbb{C}P_2 \to F/Top$ を次のように作る。$g : S^2 \to F/Top$

を $\pi_2(F/Top)=\mathbb{Z}_2$ の generator とし，$S^3 \xrightarrow{H} S^2$ を Hopf-fibration とする。$\pi_3(F/Top)=0$ ゆえ合成：$S^3 \xrightarrow{H} S^2 \xrightarrow{g} F/Top$ は null-homotope. よってある map $\mathbb{C}P_2 \to F/Top$ に g が拡張される。この map を $h: \mathbb{C}P_2 \to F/Top$ とするのである。すると合成：$\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{h} F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSTop\langle 4\rangle \to BSF\langle 4\rangle$ は null-homotopic ではない。

証明：fibration：$spin\text{-}F \to F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSTop\langle 4\rangle$ を考える。$\pi_2(Spin F) \cong \pi_2(F/Top)$ ゆえ $g: S^2 \to F/Top$ は $g^\circ: S^2 \xrightarrow{g'} Spin F \to F/Top$ と考えられる。合成 $S^3 \xrightarrow{H} S^2 \xrightarrow{g'} Spin F$ は n を充分大としたときの合成：$S^{n+3} \xrightarrow{S^nH} S^{n+2} \xrightarrow{\bar{g}} S^n$ なる map の adjoint である。S^nH は球面の1次元 stable homotopy 群 π_1 の generator η であり，$\bar{g}$ は stable 2-stem $\pi_2 \cong \mathbb{Z}_2$ の generator η^2 である。合成 $\bar{g}\cdot S^nH$ は $\eta^3 \in \pi_3$ であり $\pi_3 \cong \mathbb{Z}_{24}$ の 12 に等しい。(c.f. Toda [6].) とくに合成：$g'\circ H: S^3 \to Spin F$ は 0 でない。これの表わす元を $x \in \pi_3(Spin F)$ と記す。BSTop$\langle 4\rangle$ は 3-connected ゆえ合成：$\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{h} F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSTop\langle 4\rangle$ は $\pi_4(BSTop\langle 4\rangle)$ の元 y を与える。exact seq：$\pi_4(F/Top) \xrightarrow{\tilde{\nu}_*} \pi_4(BSTop\langle 4\rangle) \xrightarrow{\partial} \pi_3(Spin F)$ において，$\partial y = x \neq 0$ が成立つから y は Image $\tilde{\nu}_*$ に入っていない。図式：

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_4(BSTop\langle 4\rangle) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_4(BSF\langle 4\rangle) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_4(F/Top) \arrow[ur, "\tilde{\nu}"] \arrow[r, "\nu"'] & \pi_4(BSTop) \arrow[r] & \pi_4(BSF)
\end{tikzcd} \quad (\text{完全})$$

により，y を $\pi_4(BSTop)$ の元とみなすとそれは Im ν に入らない。ゆえ $\pi_4(BSF)$ に移っても 0 でない。~~[illegible]~~ 従がって，合成：$\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{h}$

$F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSTop\langle 4\rangle \to BSF\langle 4\rangle$ の決める $\pi_4(BSF\langle 4\rangle)$ の元は 0 でない。よってこの合成は null-homotopic ではない。[例] の証明及び補題1の証明終り。 $\gamma = p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k$ とおく。

<u>補題</u>2：γ は $\mathrm{Ker}(H^4(F/Top; Z_{24}) \to H^4(F/Top\langle 4\rangle; Z_{24}))$ に入る。

証明：合成：$F/Top\langle 4\rangle \to F/Top \to BSF\langle 4\rangle$ が $BSF\langle 5\rangle$ へ lift することを示せばよい。$H^4(F/Top\langle 4\rangle; \pi_4(BSF\langle 4\rangle)) = \mathrm{Hom}(\pi_4(F/Top\langle 4\rangle), \pi_4(BSF\langle 4\rangle))$. 上の合成は $\pi_4(F/Top\langle 4\rangle) \to \pi_4(BSF\langle 4\rangle)$ の準同型としては 0 ゆえ、lift の obstruction は 0 である。証明終。

ところで $\mathrm{Ker}(H^4(F/Top : Z_{24}) \to H^4(F/Top\langle 4\rangle : Z_{24})) \cong Z_2$ であり、$i_* k_2^2$ で生成される。このことは fibration $F/Top\langle 4\rangle (= F/Top\langle 3\rangle) \to F/Top \to K(Z_2, 2)$ に associate した Serre の exact seq を調べればわかる。これで定理1が示せた。

<u>注意</u>：Hsiang-Wall [2] は Complex X 上の Top-bundle で fibre-homotopy trivial なもの ξ については $p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi) = 0 \in H^4(X : Z_{24})$ を証明なしに主張している。彼等の主張がもし"任意の <u>F/Top-bundle</u> について $p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi) = 0$"を主張しているなら定理1より誤まりであるが、また"fibre-homotopy trivial な Top-bundle に<u>適当な F/Top-bundle の structure を与えれば</u> $p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi) = 0$"という意味にとっても、補題1の後に与えた [例] はこの主張の反例となっている。その証明：写像

$g: \mathbb{C}P_2 \to BSTOP$ が $\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{\tilde{g}} F/Top \xrightarrow{\nu} BSTOP$ と分解すると仮定するとき，g の lift $\tilde{g}$ をひとつきめると，合成 $\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{\tilde{g}} F/Top \xrightarrow{\tilde{\nu}} BSTOP\langle 4\rangle$ は $\pi_4(BSTOP\langle 4\rangle)$ の元をきめる。これを $[\tilde{g}]$ と書く。この $[\tilde{g}] \in \pi_4(BSTOP\langle 4\rangle)$ は g のみで定まり g の lift $\tilde{g}$ によらない。何故なら，$\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ を g の2つの lifts とし，$\rho: BSTOP\langle 4\rangle \longrightarrow BSTOP$ を projection とする。$g \simeq \rho\circ\tilde{g}_i \ (i=1.2)$ ゆえ，写像 $F: \mathbb{C}P_2\times I \to BSTOP$ があって $F_i \equiv F|\mathbb{C}P_2\times i = \rho\circ\tilde{g}_i \ (i=1.2)$。ここで $F_i(S^2\times i) = *$ としてよい。これより $F|S^2\times I$ は $S^2\times I \to S^3 \longrightarrow BSTOP$ と分解するが $\pi_3(BSTOP) = 0$ ゆえ $F(S^2\times I) = *$ と仮定してよく，F は $\mathbb{C}P_2\times I \longrightarrow S^4\times I \xrightarrow{\tilde{F}} BSTOP$ と分解し，$\tilde{F}$ は S^4 からの写像としての $\rho\circ g_1$ と $\rho\circ g_2$ の homotopy を与える。ゆえ $\rho_*[\tilde{g}_1] = \rho_*[\tilde{g}_2] \in \pi_4(BSTOP)$。ところが $\rho_*: \pi_4(BSTOP\langle 4\rangle) \cong \pi_4(BSTOP)$ $\therefore [\tilde{g}_1] = [\tilde{g}_2]$.

いま g として $\nu\circ h: \mathbb{C}P_2 \longrightarrow BSTOP$ をとる。（h は [例] で与えたもの。）$\nu\circ h$ の任意の lift：$\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{\psi} F/Top$ について $[\psi] = [\tilde{\nu}\circ h] \in \pi_4(BSTOP\langle 4\rangle)$ は，いま示した。よって [例] で証明されているように $[\psi]$ は $\pi_4(BSTOP\langle 4\rangle) \to \pi_4(BSF\langle 4\rangle)$ で0にうつらない。すなわち lift $\psi: \mathbb{C}P_2 \to F/Top$ of $\nu\circ h$ によらず $p_* \vartheta_1(\xi) + i_* k(\xi) \neq 0$ が示せた。（ξ は h で分類される $\mathbb{C}P_2$ 上の F/Top-bdle）

§3. ある種の不変性

この§で次の定理を示す。

<u>定理2</u>：M^5を5次元閉多様体，$\pi_1(M^5)$はablianで2-torsionがない。$H^2(M^5 : Z_2) = 0$とする。そのとき任意のホモトピー-equivalence $f : M^5 \to L^5$について$f^* k_{L^5} = k_{M^5}$が成立つ。

<u>証明</u>：τ_L, τ_Mをtangent bundleとせよ。$\tau_M - f^*\tau_L$はM上のF/Top-bundleである。そのclassifying map $g : M \to F/Top$をとる。$\tilde{M} \xrightarrow{\varpi} M$をodd-covering，$\pi_1(\tilde{M}) =$ freeとする。$\xi = \tau_M - f^*\tau_L$とおく。定理1により$\varpi^*(p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi)) = \varpi^* i_* k_2^2(\xi)$．$H^2(M^5 : Z_2) = 0$としたから$k_2(\xi) = 0$ゆえ右辺は0．ゆえに　(*)　$\varpi^*(p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi)) = 0$．

$\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{L}$を，$f$をcoverするホモトピー-equivalenceとする。$g \circ \varpi : \tilde{M} \to F/Top$は$\tau_{\tilde{M}} - \tilde{f}^*\tau_{\tilde{L}}$のclassifying mapである。

さて$2q_1(\varpi^*\xi) = 2q_1(\tau_{\tilde{M}} - \tilde{f}^*\tau_{\tilde{L}}) = p_1(\tau_{\tilde{M}} - \tilde{f}^*\tau_{\tilde{L}}) = p_1(\tilde{M}) - f^* p_1(\tilde{L})$．Novikovによりfree abelian fundamental groupをもつ5次元多様体のp_1はホモトピー不変であることが示されている。その証明はPL-splitting lemmaを使うが，それは高次元ではTop-categoryに拡張されるから，CP_{2n}を掛けて高次元へのreductionを行えばTop categoryでのp_1のホモトピー不変性（5次元での）が示される。（一般には$4k+1$-manifoldのL_{4k}-genus）．こうして$p_1(\tilde{M}) - f^* p_1(\tilde{L}) = 0$．更に仮定より$H^4(\tilde{M} : Z)$はtwo-torsionを含まないから，$2q_1(\varpi^*\xi) =$

$=0$ から $q_1(\varpi^*\xi)=0$ が従う。上の式(*)に代入して

$$(**) \qquad \varpi^* i_* k(\xi)=0$$

を得る。

<u>補題3</u>：$\tilde{M}^n \xrightarrow{\varpi} M$ が閉多様体の間の odd-covering なら $\varpi^*: H^i(M^n : \mathbb{Z}_2) \to H^i(\tilde{M}^n : \mathbb{Z}_2)$ は $\forall i$ について injective である。

<u>証明</u>：ϖ は odd-covering ゆえ $\mathbb{Z}_2$-係数では ϖ は degree 1．よって図式：

$$\begin{array}{ccc} H^i(M^n : \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\varpi^*} & H^i(\tilde{M}^n : \mathbb{Z}_2) \\ \cong \downarrow \cap [M^n] & & \cong \downarrow \cap [\tilde{M}^n] \\ H_{n-i}(M^n : \mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{\varpi_*} & H_{n-i}(\tilde{M}^n : \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

の可換性から，ϖ^* の injectivity が従う．補題3の証明終り。

補題3と上の(**)から $i_* k(\xi)=0$，また i_* も injective ゆえ $k(\xi)=0$．$k(\xi)=k(\tau_M - f^*\tau_L) = k_M - f^* k_L$ ゆえ定理2が証明された。

§4 補足

我々の定理2は次のような少し精密な形に書くこともできる：

<u>定理2′</u>：M^5 を5次元閉多様体．$\pi_1(M^5)$ は abelian で 2-Torsion がない．$S_q^2 : H^2(M^5 : \mathbb{Z}_2) \to H^4(M^5 : \mathbb{Z}_2)$ が 0-map．そのとき任意のホモトピー同値 $f: M^5 \to L^5$ について $f^* k_L = k_M$ が成立つ．

定理2の証明をふりかえってみれば，要するに $k_2^2(\xi) \in H^4(M^5 : \mathbb{Z}_2)$ を0にすることが問題であった。明らかに $k_2^2(\xi) = S_q^2(k_2)$

ぐあるから，$Sq^2=0$ の仮定により $k_2^2(\xi)=0$ となる。これで定理 $2'$ が示された。

<u>注意1</u>：前にものべたように "$p_*g_1+i_*k$ がホモトピー不変性をもつ" という Hsiang-Wall の主張は一般には正しくない。しかし $Sq^2: H^2(M:\mathbb{Z}_2)\to H^4(M:\mathbb{Z}_2)$ が 0-map であるような任意の複体Mについては $p_*g_1+i_*k$ がホモトピー不変となる。しかも n-torus T^n はこの性質をもっている。従がって彼等のホモトピートーラスに関する主張は正しいことになる。

<u>注意2</u>：このシンポジウムで松本尭生氏が Sq^2 の条件のかわりに 2nd Stiefel-Whitney class $w_2=0$ を仮定して5次元閉多様体の三角形分割の不変性を発表した。最近彼の結果が定理 $2'$ を用いても証明できることがわかった。それには次の補題に注目すればよいであろう。

<u>補題4</u>：5次元閉多様体 M^5 において $H^4(M:\mathbb{Z})\ (\cong H_1(M:\mathbb{Z}))$ に 2-torsion がない，かつ $w_2=0$ とすると $Sq^2: H^2(M:\mathbb{Z}_2)\to H^4(M:\mathbb{Z}_2)$ は 0-map である。（M：向きづけ可能とする．定理 2, $2'$ でもそれを仮定している。）

<u>注意</u>：補題4は4次元閉多様体についてはtrivialである。

<u>補題4の証明</u>：第1段：$H_1(M^5:\mathbb{Z})$ に 2-torsion がなければ $Sq^1: H^1(M^5:\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^2(M^5:\mathbb{Z}_2)$ は 0-map である。

(∵) $H_1(M^5:\mathbb{Z})$ に 2-torsion がないので，$H^1(M^5:\mathbb{Z}_4)\to H^1(M^5:\mathbb{Z}_2)$

は onto. 従がって $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ に associate した Bockstein homo $\beta = S_q^1 : H^1(M : \mathbb{Z}_2) \to H^2(M : \mathbb{Z}_2)$ は 0 - map である。(∵)

才2段：$H_1(M^5 : \mathbb{Z})$ に 2-torsion がなければ、$\forall\, \alpha \in H^2(M : \mathbb{Z}_2)$ と $\forall\, \gamma \in H^1(M : \mathbb{Z}_2)$ について次の式がなりたつ：

$$S_q^2(\alpha \cup \beta) = S_q^2\alpha \cup \gamma$$

(∵) Cartan formura と才1段のことから明らか (∵)

補題4の証明は次のようにして終る：u_i を i 番目の Wu class とすると $w_2 = u_2 + S_q^1 u_1 + S_q^2 u_0 = u_2$（才1段）. Wu's formula から $S_q^2 x = x \cup u_2$ for $\forall\, x \in H^3(M^5 : \mathbb{Z}_2)$ よって $w_2 = 0$ を仮定すれば $S_q^2 : H^3(M^5 : \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^5(M^5 : \mathbb{Z}_2)$ は 0-map. よって(才2段)により $S_q^2\alpha \cup \gamma = 0$ $(\forall \alpha \in H^2(M : \mathbb{Z}_2), {}^{\forall}\gamma \in H^1(M : \mathbb{Z}_2).)$ これが $\forall\, \gamma \in H^1$ についてなりたつということから Poincaré duality を使って $S_q^2\alpha = 0$ $\forall\, \alpha \in H^2(M : \mathbb{Z}_2)$ となる.

証明終.

<u>References</u>

[1] S. Fukuhara : On the Hauptvermutung of 5-dimensional manifolds and s-cobordisms. (to appear)

[2] Hsiang-Wall : On ~~the~~ homotopy tori. II. (Bull. London. Math. 1. 1969. 341 – 342)

[3] S. Ichiraku : On Realization of Kirby-Siebenmann's Obstructions by 6-manifolds

[4] Kirby-Siebenmann : Some theorems on topological manifolds.

[5]. S. Morita : このシンポジウム予稿集

[6] H. Toda : Composition methods in homotopy groups of spheres.