数理解析研究所講究録
第129巻 1971年 35-50

有限要素法の誤差について

東大　工学部　　辻　尚史

§1．　序

有限要素法における未解決の問題について考えてみると，
(1) 収束するために，分割法に課せられる条件。
(2) ある基底関数をとったときに収束するかどうか。収束する場合に，その意味とオーダー [2]，[5]，[7]，[8]。
(3) 近似された有限系の数値的安定性 [4]。
(4) 誤差の漸近展開。
などがあるが，ここでは (2) の点について，基底関数がある条件を満たしているときに，少なくともエネルギ収束をすることを数値実験例も合わせて考察する。

現在，有限要素法によって解かれている問題には，平面応力問題，板の曲げ等があるが，ここではおもに，例題として2階の自己随伴方程式で，2次元の場合に三角形要素に分割する場合について考えることにする。

§2. エネルギ法

一般に，$\mathcal{L}$をあるヒルベルト空間$\mathcal{H}$で定義された正定値対称作用素として，その定義域$\mathcal{D}(\mathcal{L})$が稠密であるとするとき，$\mathcal{D}(\mathcal{L})$の上で新しい内積（エネルギ積）を，

(2.1)　$\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ に対して，　$[u, v] \equiv (\mathcal{L}u, v)$

と定義する。　$\mathcal{D}(\mathcal{L})$をノルム $\|u\| = [u, u]^{1/2}$ に関して完備化してヒルベルト空間$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$を得る。

ところで，$\mathcal{L}$が正定値対称作用素であるから，

(2.2)　$\exists \gamma > 0 \quad (\mathcal{L}u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$.

さて，　$\mathcal{L}u = f$ が解を持てば，その解は汎関数

(2.3)　$J[u] = (\mathcal{L}u, u) - 2(u, f)$

を最小にする。　逆に，これを最小にするuが存在すれば，それは　$\mathcal{L}u = f$　の解である[6]。

Cauchyの不等式および (2.1)，(2.2)より，

$$|(u, f)| \leq \|f\| \cdot \|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| \cdot \|u\|_{\mathcal{L}}$$

であるから，Rieszの定理によって，

$$\forall u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}, \exists u_0 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}} \qquad (u, f) = [u, u_0].$$

簡単な計算によって，

(2.4)　$J[u] = \|u - u_0\|_{\mathcal{L}}^2 - \|u_0\|_{\mathcal{L}}^2$

を得る。　これから明らかなように，$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$の汎関数$J[u]$は，$u = u_0$ のとき最小となる。　また，　$J[u_0] = -\|u_0\|_{\mathcal{L}}^2$

であるから,

(2.5) $\quad \| u-u_0 \| = J[u] - J[u_0]$.

有限要素法においては,領域Ω——簡単のため多角形であるとする——を三角形,四角形などの要素に分割し,各要素は隣接する要素と辺を共有するものとする。

要素Ω_k内で,パラメタ$\varsigma_1^k, \cdots, \varsigma_m^k$ を持った十分滑らかな関数

$$U^k(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \varsigma_i^k \phi_i^k(x,y)$$

を考える。 ここで, $\phi_i^k(x,y)$は, $(x_i, y_i) \in \Omega_k$, fを$\overline{\Omega_k}$で十分滑らかな関数として, Λ_i^kをある$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$に対して, $\Lambda_i^k f = D^{\alpha_i} f(x_i, y_i)$ $\qquad D^{\alpha_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_{i1}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_{i2}}$

なる汎関数とするとき, $\Lambda_i^k \phi_j^k(x,y) = \delta_{ij}$ なるΩ_k内で,十分滑らかな関数である。 このとき,Ω全体における試験関数$U(x,y)$を, χ_kをΩ_kの特徴関数として,

$$U(x,y) = \sum_k U^k(x,y) \chi_k$$

とする。 ここで,Λ_i^kの決め方により,ς_i^kはΩ_kの頂点等における$U(x,y)$の値等であるから, $\varsigma_i, i=1, \cdots, N$ を同じ点におけるς_i^kを同一視して得たものとするとき, ς_iを,$U(x,y)$のパラメタと考えることができるが,このような$U(x,y \mid \varsigma_1, \cdots, \varsigma_N)$ のつくる空間をH_ℓとするとき,H_ℓにおいて,$J[U]$を最小にする $U_0(x,y)$ が有限要素法による

近似解であるから，(2.5)より，$\forall v \in H_{\mathcal{L}}$ に対して，

$$(2.6)\quad \| v_0 - u_0 \|_{\mathcal{L}}^2 = J[v_0] - J[u_0] \leqq J[v] - J[u_0] = \| v - u_0 \|_{\mathcal{L}}^2 .$$

すなわち，v_0 は u_0 の $H_{\mathcal{L}}$ における最良近似である。とくに $\tilde{v}(x,y)$ を，$\tilde{\zeta}_i^k = \Lambda_i^k u_0,\ i=1,\cdots,N$；$\tilde{v}^k(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\zeta}_i^k \phi_i^k(x,y)$ なるものとすれば，

$$(2.7)\quad \| v_0 - u_0 \| \leqq \frac{1}{\gamma} \| v_0 - u_0 \|_{\mathcal{L}} \leqq \frac{1}{\gamma} \| \tilde{v} - u_0 \|_{\mathcal{L}} .$$

§3. 誤差評価

まず，問題を簡単化するため，一次元について考える。

問題(I) $$\begin{cases} \mathcal{L} u \equiv -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x) u = f(x) & a \leqq x \leqq b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

ただし，$a \leqq x \leqq b$ で $p(x)$, $q(x)$ は区分的に連続かつ非負であって，$\int_a^b \frac{dx}{p(x)}$ が存在して，$p(a) \neq 0$, $p(b) \neq 0$ とする。

区間 $[a,b]$ の分割を，$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b$ とし，$h_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \cdots, N$；$h = \max_k h_k < 1$.

区間 $[x_k, x_{k+1}]$ で定義された $v^k(x)$ を，

$$D^i v^k(x_k) = \zeta_k^{(i)},\quad D^i v^k(x_{k+1}) = \zeta_{k+1}^{(i)}\quad i = 0, 1, \cdots, m$$

なる $n\ (=2m+1)$ 次多項式とするとき，$v(x)$ のつくる空間 H_1 は，$H_1 \subset W_2^1(a,b)$ である。ここで，解 u_0 の $(n+1)$ 階導関数が有界，$| D^{n+1} u_0 | \leqq M_{n+1}$ と仮定する。

$\varphi = \tilde{U} - u_0$ とすると，仮定によって，

(3.1) $D^i \varphi(x_j) = 0 \qquad j = k, k+1 \; ; \; i = 0, 1, \cdots, m$

$|D^{m+1}\varphi| \leqq M_{m+1}$

である。

補題1　m を非負なる整数，$n = 2m+1$ とするとき，$\varphi(x)$が

i) $D^i \varphi(x) \quad i = 0, 1, \cdots, m$ は $[x_0, x_1]$ で連続.

ii) $D^i \varphi(x_j) = 0 \qquad j = 0, 1 \; ; \; i = 0, 1, \cdots, m$

iii) $|D^{m+1}\varphi(x)| \leqq M_{m+1} \qquad x \in (x_0, x_1)$

をみたすならば，$h = x_1 - x_0$ として，

$$|\varphi(x)| \leqq \left(\frac{h}{2}\right)^{m+1} M_{m+1}, \quad |D^1\varphi(x)| \leqq 2\left(\frac{h}{2}\right)^m M_{m+1}$$

である [7]。

(3.1) と補題1によって，

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}} \leqq C_1 M_{m+1}^2 h^{2m}$$

$$C_1 = \{\max p \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m+2} + \max q \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\}(b-a)$$

が成りたつから，(2.7) より，

(3.2) $\|U_0 - u_0\| \leqq k_1 M_{m+1} h^m \qquad K_1^2 = C_1/\gamma$

補題2（Sobolev の補題）

$x = (x_1, \cdots, x_m)$ とするとき，$u(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ であって，整数 k が $p(l-k) > m$ であるとすると，

$$u(x) \in C^{(k)}(\Omega)$$

$$\|u\|_{C^{(k)}} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| = k}} |D^\alpha u(x)| \leqq C \|u\|_{W_p^{(l)}}(\Omega).$$

ここで，Cはuによらない定数[6].

(3.2) および補題2より，

$$|U_0-u_0| \leqq KM_{n+1}h^n \qquad K=K_1C$$

すなわち，この問題については，有限要素法による近似解は $\|\cdot\|_\infty$ の意味で $O(h^n)$ の収束をする。

さて，問題を2次元の場合にかえすことにする。

問題(II) $\displaystyle \mathcal{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu=f \quad (x_1,x_2)\in\Omega.$

ここで，　a_{ij}, c, f は $\bar{\Omega}$ で連続，　$a_{ij}=a_{ji}$，

$\displaystyle \sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \mu\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2$　μは定数で　$\mu>0$，

$c(x_1,x_2)\geqq 0$

であるとし，境界条件は

i)　$u|_\Gamma=0$

または　iii)　$\displaystyle \left[\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)+\sigma u\right]\Big|_\Gamma=0$

（νはΓの外向き法線，(ν,x_i)はνと軸x_iとのなす角であって，σは　$\sigma\geqq 0$，$\sigma\not\equiv 0$　とする．）

ここでは，三角形要素Ω_K内での試験関数として，格子点P_j（三角形の各辺をn等分し，各n等分点よりそれぞれ各辺に平行な線分をΩ_K内にひき，それらの交点およびもとのn等分点）上で値ζ_i^Kを持つn次多項式$U^K(x,y)$とする方法について考える。　このとき　Λ_i^Kは　$\Lambda_i^K u = u(P_i)$　である.

明らかに，$\mho(x,y)$ の構成する空間 H_2 は，$H_2 \in W_2^1(\Omega)$．

解 u_0 が $(n+1)$ 階の有界な導関数を持つ，すなわち，

$$|D^\alpha u_0| \leqq M_{n+1} \qquad |\alpha| = n+1$$

とすると，前と同様に $\tilde{\mho}$ を，$\tilde{\mho} \in H_2$ であって，$\forall K$ に対して

$$\Lambda_i^K \tilde{\mho}(x,y) = u_0(P_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

なるものとし，$\varphi = \tilde{\mho} - u_0$ とおけば，

$$(3.3) \qquad |D^\alpha \varphi| \leqq M_{n+1} \qquad |\alpha| = n+1$$

$$\varphi(P_i) = 0 \qquad i = 1, \cdots, \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

定理 1　T を 3 点 $P_i(x_i, y_i)$ $i=0,1,2$ を頂点とする三角形とし，$\theta_i = \angle P_i$ $i=0,1,2$，$h_0 = \overline{P_1P_2}$，$h_1 = \overline{P_2P_0}$，$h_2 = \overline{P_0P_1}$ とする。また Q_{ij} ($0 \leqq i, j, i+j \leqq n$) を，各辺の n 等分点と，それから各辺に平行にひいた三角形内の線分の交点とする。

$\varphi(x,y)$ が条件

i) $\varphi(x,y)$ は $\overline{T}$ で連続

ii) $|D^\alpha \varphi(x,y)| \leqq M_{n+1}$ $\quad |\alpha| = n+1 \quad (x,y) \in T$

iii) $\varphi(Q_{ij}) = 0 \qquad 0 \leqq i+j \leqq n$

をみたすならば，C_1, C_2 を φ に依らぬ定数，$h = \max\limits_{i=0,1,2} h_i$，$\theta = \min\limits_{i=0,1,2} \theta_i$ とすると，

$$|\varphi| \leqq C_1 \frac{M_{n+1}}{\sin\theta} h^{n+1}, \quad |D^\alpha \varphi| \leqq C_2 \frac{M_{n+1}}{\sin\theta} h^n \quad |\alpha| = 1.$$

である[7]。

(3.3) と定理 1 によって，h_K，θ_K を Ω_K の最大辺，最小角

とすると，$|\varphi| \leqq C_1 \frac{M_{m+1}}{\sin\theta_K} h_K^{m+1}$，$|D^\alpha \varphi| \leqq C_2 \frac{M_{m+1}}{\sin\theta_K} h_K^{m}$　$|\alpha|=1$.

a_{ij}，c は$\overline{\Omega}$で連続であるから最大値が存在する。

$C_3 = C_1^2 \max a_{ij} + C_2^2 \max c$　とおき，$h = \max_K h_K$，$\theta = \min_K \theta_K$

$K = \frac{C_3}{\gamma} \iint_\Omega dx_1 dx_2$　とおくと，

$$\| U_0 - u_0 \|_{W_2^1(\Omega)} \leqq K \frac{M_{m+1}}{\sin\theta} h^m$$

を得る。

すなわち，有限要素法による近似解は二乗平均収束するといえるが，1次元における2点境界値問題のように，$\|\cdot\|_\infty$のノルムで収束するということは，未だいえない。勿論，試験関数が一階導関数まで連続である場合は別である。

平面応力問題のように，未知関数が2次元以上になっても2階の方程式である限り，全く同様なことが示せる。また板の曲げ等の4階の方程式の場合には，試験関数は1階導関数まで連続でなければならないが，ある試験関数をとったときに，そのパラメタの値を解のそれと一致させたとき，それが，解を補間する関数となっていることがわかれば，$W_2^2(\Omega)$のノルムで収束することがわかるばかりでなく，$\|\cdot\|_\infty$のノルムで収束することがわかる。

§4.　数値実験例

数値実験は，試験関数として，最も簡単なものである区分

的に一次関数である（§3において，$n=1$ とした）ものについて，分割の仕方を変えてみた。

分割法は，最初の分割を，F1，F2，F3 に示すものとして，分割を細かくする際には，各三角形を各辺の中点を結ぶ線分で4等分して順次細かくするという方法をとった。

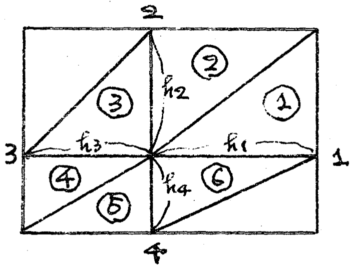
格子点（三角形の頂点）を $P_i(x_i, y_i)$，$i=1,2,\cdots,N$ とし

$$E = \bar{U}_0 - u_0$$

$$\|E\|_{\mathcal{L}} = (-\Delta E, E)^{\frac{1}{2}}, \quad \|E\|_\infty = \max_i |E(x_i, y_i)|$$

として，F1，F2，F3 の分割を行ったときの実験結果をそれぞれ，G1，G2，G3に示した。

F1の分割を行ったときには，パラメタに対する方程式は差分近似解法において，5点差分を用いたときと一致するから[4,7]，結果は明らかである。　このように正方形に分割して対角線を一本入れたものでなく，長方形の場合にも，$\|\cdot\|_\infty$ ノルムで収束することを示すことができる。



左図のようにするとき，点Oに関する差分式を有限要素法によって導びくと，

$$-\frac{h_2}{h_1}(u_1-u_0) \qquad -\frac{1}{3}h_1h_2 f_{①}$$

$$-\frac{h_1}{h_2}(u_2-u_0) \qquad -\frac{1}{3}h_1h_2 f_{②}$$

$$+\frac{h_2}{h_3}(u_0-u_3)-\frac{h_3}{h_2}(u_2-u_0) \qquad -\frac{1}{3}h_2h_3 f_{③}$$

$$+\frac{h_4}{h_3}(u_0-u_3) \qquad -\frac{1}{3}h_3h_4 f_{④}$$

$$+\frac{h_5}{h_4}(u_0-u_4) \qquad\qquad -\frac{1}{3}h_3h_4 f_{⑤}$$

$$-\frac{h_4}{h_1}(u_1-u_0)+\frac{h_1}{h_4}(u_0-u_4) \quad -\frac{1}{3}h_1h_4 f_{⑥} = 0$$

となるが，u に解を代入してみれば，主要項は，

$$\frac{1}{2}(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_4+h_4h_1)(u_{xx}+u_{yy})$$

$$+\frac{1}{6}(h_1+h_3)(h_2+h_4)\{(h_1-h_3)u_{xxx}+(h_2-h_4)u_{yyy}\}+O(h^4)$$

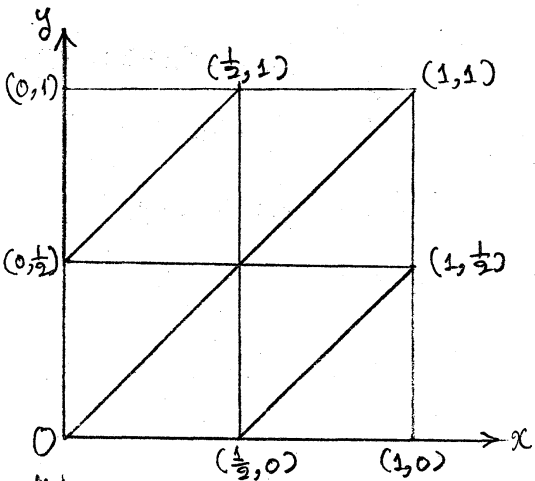
となることからわかる。

また，F2，F3 の分割においても，G2，G3 をみると §2 の結論である少なくともノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ では1次の収束をするということが成り立っていると思われる。

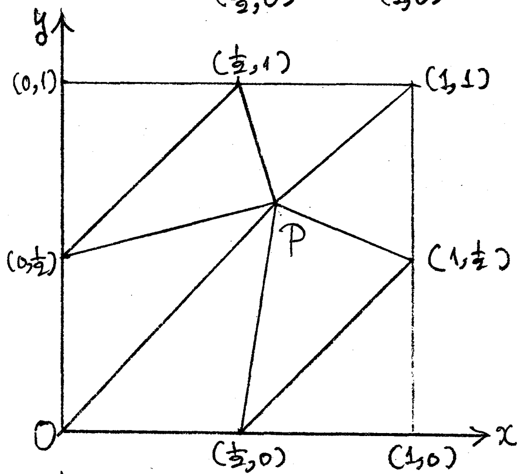
しかし，ノルム $\|\cdot\|_\infty$ についてみるとこの実験の範囲では収束するとはいえない。 むしろ，F3 の分割においては，誤差はノルム $\|\cdot\|_\infty$ において増したりしている。 F2 の分割では，$\|E\|_\infty$ としは，この範囲では増してはいないのであるが，各点における誤差を追ってみると，分割が細かくなるに従って増大する点さえも存在する。 この現象は，F3 の分割においても起っている。

勿論，現在までの実験においては，分割は未だかなり粗いことに注意しなければならないことは確かではある。

F1

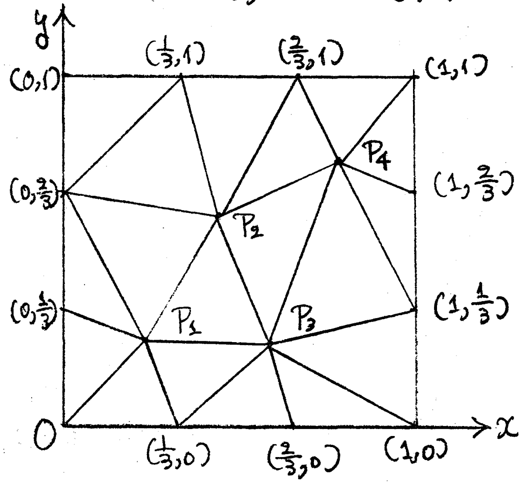


F2.



P (0.6, 0.65)

F3.



$P_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$P_2\left(\frac{5}{12}, \frac{37}{60}\right)$

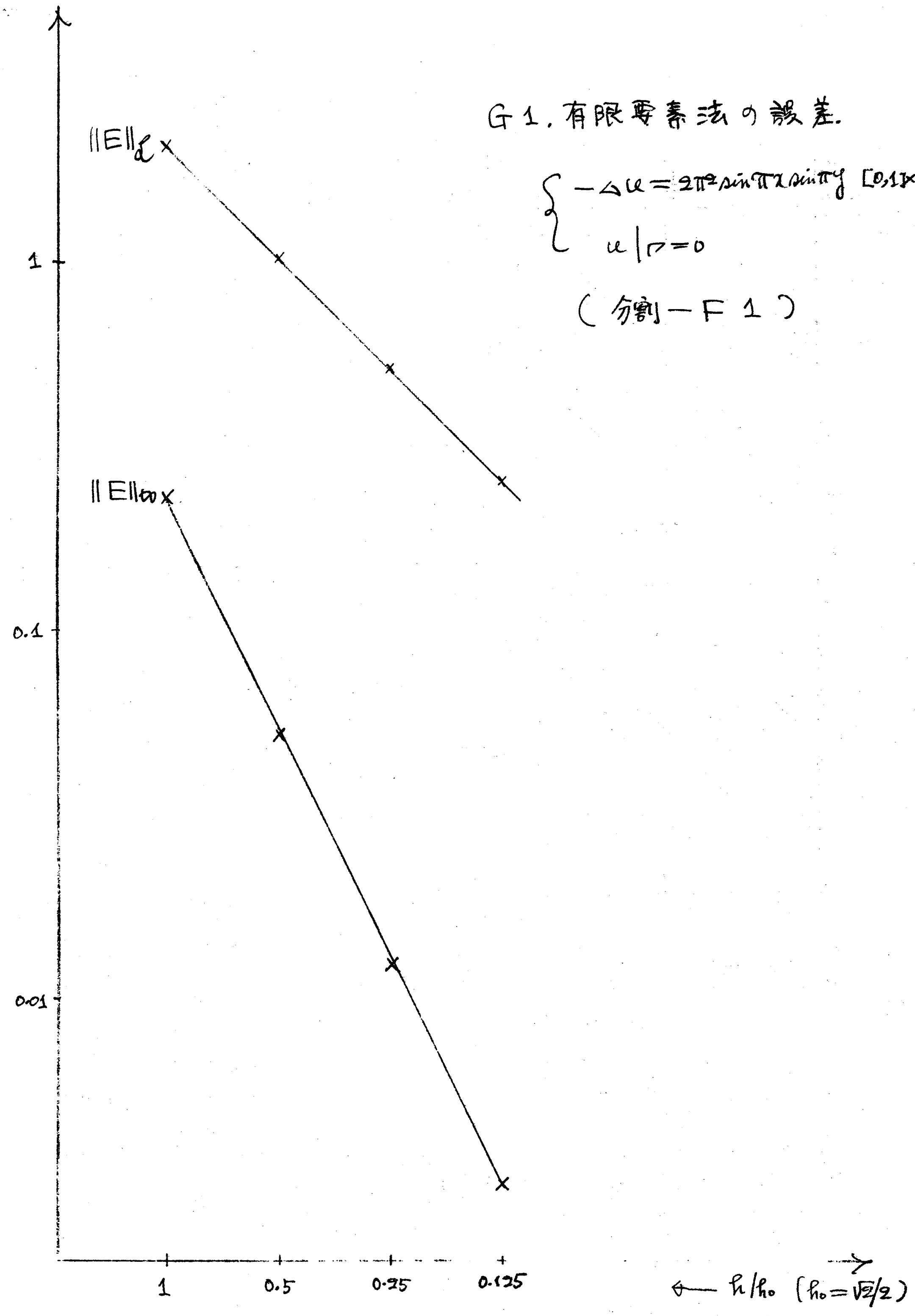
$P_3\left(\frac{19}{3}, \frac{1}{4}\right)$

$P_4\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

G 1. 有限要素法の誤差.

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y & [0,1]\times[0,1] \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

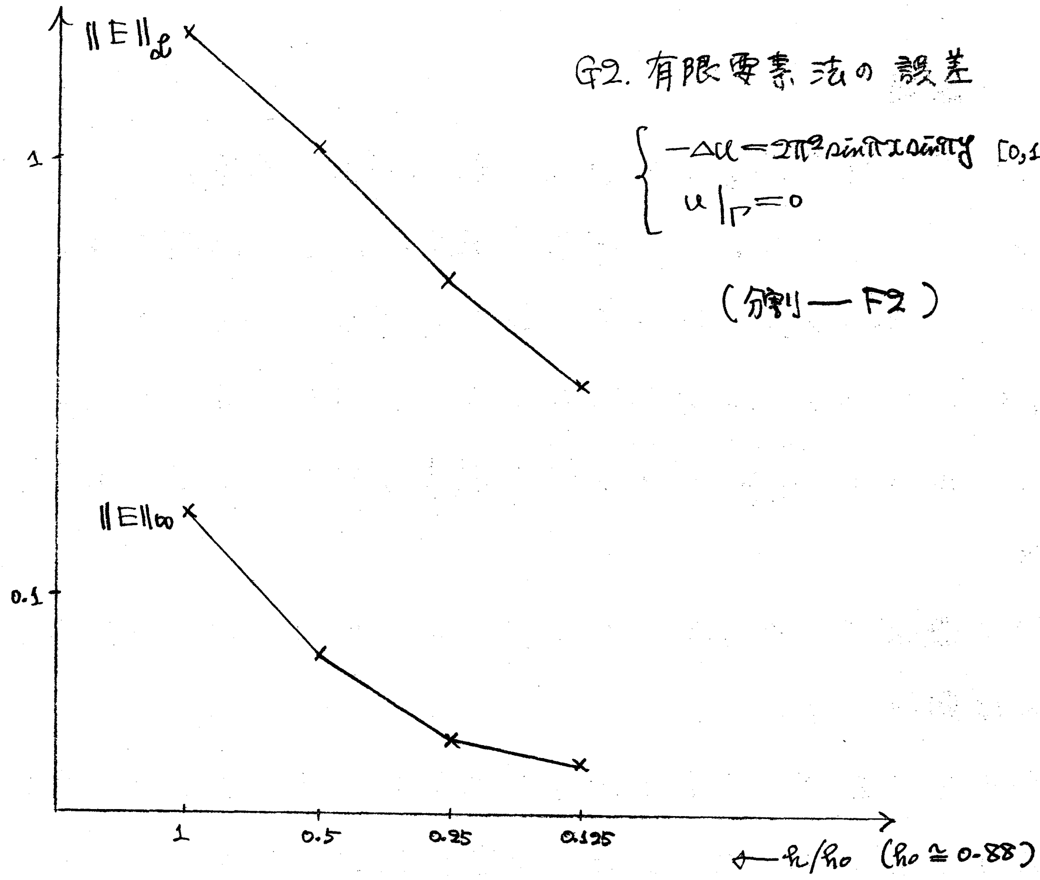
(分割－F 1)



G2. 有限要素法の誤差

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \sin\pi x \sin\pi y & [0,1]\times[0,1] \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

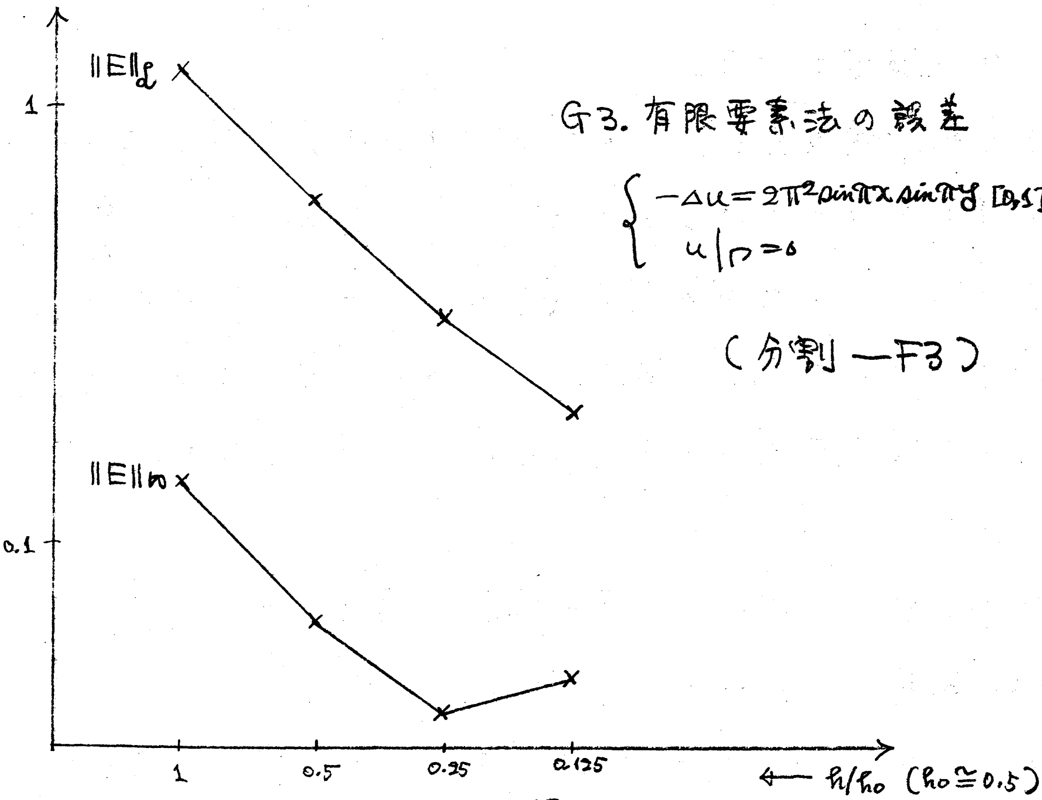
(分割 — F2)



G3. 有限要素法の誤差

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \sin\pi x \sin\pi y & [0,1]\times[0,1] \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

(分割 — F3)



結語

ここでは，要素Ω_k内で$\tilde{u}^k$が，解u_0のある程度より近似関数となっているときには，有限要素法による近似解$\bar{u}_0$は，すべての三角形の最大辺をh，最小角をθとするとき，

$\theta \geqq \theta_0 > 0$ なるθ_0が存在するように分割し，$h \to 0$ としたとき，ノルム$\|\cdot\|_{W_2^{(1)}}$でみる限り収束することを示したわけである。

数値実験例が示唆するように，ノルム$\|\cdot\|_\infty$での収束は，一般には期待できない。

エネルギに相当するものが要求されている場合にはこれでよいわけであるが，各点における近似値が要求されている場合には不都合である。

こうした事情を考え，いかに分割すれば，各点における収束が得られるのであろうかということを探るため，数値実験においていろいろな分割を試みた。 F1の分割では，結局相隣接する要素と，あたかも一階導関数が連続であるかの如き差分式を構成するので，ノルム$\|\cdot\|_\infty$で収束してしまうのである。

一階導関数まで連続なる基底関数を構成するのは，2次元補間法の発展を待たねばならない。

しかし，基底関数を滑らかにしようとすれば，計算量が

莫大になる恐れがあることに注意しなければならない。

なお，この研究を進めるにあたり，指導をいただいた森口繁一先生，度々の議論をして下さった埼玉大学の小林光夫先生に，ここに感謝の意を表します。

参考文献

[1] Birkoff, G., and C.R. de Boor: Piecewise polynomial interpolation and approximation. Approximations of functions. ed by H.L. Garabedian. pp. 164–190. Elsevier, 1965.

[2] Birkoff, G., M.H. Schultz, and R.S. Varga: Piecewise Hermite interpolation in one and two variable with applications to partial differential equations. Num. Math. 11, pp. 232–256 (1968).

[3] Courant, R.: Variational methods for the solution on problems of equibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. 49, pp. 1–23 (1943).

[4] Fix, G., and G. Strang: Fourier Analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. Studies in App. Math. 48, pp. 265–273 (1969).

[5] Friedrichs, K.O., and H.B. Keller: A finite difference scheme for generalized Neuman problems. Num. Sol. of P.D.E. ed by J.H. Bramble. pp. 1–19, Academic Press, 1966.

[6] Mikhlin, S.G., and K.L. Smolitzky: Approximate methods for the solution of differential and integral equations. pp. 145–269. Elsevier, 1967.

[7] 辻尚史：有限要素法の誤差について．東大修論．1970.

[8] Zlamal, M.: On the finite element method.
Num. Math. 12, pp. 394–409 (1968).