数理解析研究所講究録
第 131 巻 1971 年 11-28

Pontyagin square と signature について.

東大 理 森田茂之

§1. 結果

V を $\mathbb{Z}_2$-vector space とし,

$$\mu : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

を non-singular symmetric pairing とする.
関数 $\eta : V \to \mathbb{Z}_4$ は, 任意の $x, y \in V$ に対して,

$$\eta(x+y) = \eta(x) + \eta(y) + j_* \mu(x \otimes y)$$

をみたす時, μ に関し quadratic であるという。
ここに $j : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ は自明でない準同型.

この時, E. H. Brown [1] に従って, 我々は η の Arf-invariant $\sigma(V, \eta) \in \mathbb{Z}_8$ を次のように定義する.

$$\alpha(\eta) = \sum_{x \in V} i^{\eta(x)} \in \mathbb{C}$$

とおく。ここに $i^2=-1$，かつ $\mathbb{Z}_8$ は $\{1, i, -1, -i\}$ に自然に act するものとする．この時

$$\alpha(\eta)^8 = (\sqrt{2}^{\dim V})^8$$

が成りたつ．（Prop. 2-3. の証明参照）．

従って，

$$\alpha(\eta) = \sqrt{2}^{\dim V} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$$

となる $m \in \mathbb{Z}_8$ がある．そこで我々は $\sigma(V, \eta) = m$ と定義する．

さて．M^{4n} を formal dimension $4n$ の連結．向きづけされた Poincaré complex とする．この時．Pontryagin square

$$P_2 : H^{2n}(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{4n}(M; \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$$

は．cup 積に関して quadratic であるから．Arf-invariant $\sigma(M, P_2) = \sigma(H^{2n}(M; \mathbb{Z}_2), P_2) \in \mathbb{Z}_8$ が定義できる．我々の結果は．

定理 1-1. M^{4n} を formal dimension $4n$ の連結、向きづけされた Poincaré complex とする．この時．

$$\sigma(M, P_2) = \text{signature } M \mod 8.$$

この定理は、E. H. Brown によって予想されていた。([1]).

系 1-2. M^{4n} を同じ様のとするとき,

$$\text{signature} \bmod 4 = P_2(V_{2n}(M)).$$

ここに、$V_{2n}(M)$ は M の $2n$-th Wu class.

§2. Arf invariant に関するいくつかの remarks.

次の Proposition は E. H. Brown による.

Prop. 2-1. (i) $\eta_i : V_i \to \mathbb{Z}_4$ $(i=1,2)$ を $\mu_i : V_i \otimes V_i \to \mathbb{Z}_2$ に関して quadratic な関数とする. $\eta_1 \oplus \eta_2 : V_1 \oplus V_2 \to \mathbb{Z}_4$ を,
$(\eta_1+\eta_2)(x_1,x_2) = \eta_1(x_1)+\eta_2(x_2)$ で定義すると,
$\eta_1+\eta_2$ は $\mu_1+\mu_2$ に関して quadratic で

$$\sigma(V_1 \oplus V_2, \eta_1+\eta_2) = \sigma(V_1,\eta_1)+\sigma(V_2,\eta_2).$$

(ii) $L : V \to \mathbb{Z}_4$ が線型の時,

$$\alpha(L) = 2^{\dim V} \quad \text{if } L=0$$
$$\alpha(L) = 0 \quad \text{if } L \neq 0$$

(iii) $\eta : U \to \mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ 上の unimodular quadratic form の時, $\eta : U/2U \to \mathbb{Z}_4$

が定義でき，quadratic であり，かつ

$$\sigma(U, 2U, \eta) = \text{signature } \eta \mod 8.$$

系 2-2. $V = A \oplus B$, $\dim A = \dim B$, $\mu(A \otimes A) = 0$ とする． $\eta : V \to \mathbb{Z}_4$ を μ について quadratic な関数で $\eta(A) = 0$ なるものとする．この時

$$\sigma(V, \eta) = 0.$$

証) $A_b = \{a + b \,;\, a \in A\}$ $(b \in B)$ とおき，A_b に $\mathbb{Z}_2$-vector space の構造を次のように入れる．

$$(a_1 + b) \dotplus (a_2 + b) = a_1 + a_2 + b.$$

次の式で定義される関数 $\eta_b : A_b \to \mathbb{Z}_4$ を考える．

$$\begin{aligned} \eta_b(a + b) &= \eta(a + b) - \eta(b) \\ &= j\mu(a \otimes b). \end{aligned}$$

すると，η_b は $\dotplus$ について線型であるから，Prop. 2-1. により，もし $b \neq 0$ ならば，$\alpha(\eta_b) = 0$．もし $b = 0$ ならば，$\alpha(\eta_0) = 2^{\dim A}$．従って，

$$\begin{aligned} \alpha(\eta) &= \sum_{b \in B} \alpha(\eta \mid A_b) \\ &= \sum_{b \in B} \alpha(\eta_b) \cdot i^{\eta(b)} \\ &= \alpha(\eta_0) \\ &= 2^{\dim A}. \end{aligned}$$

従って.

$$\sigma(V,\eta)=0.$$ 終.

さて. M^{2n} を向きづけられた Poincaré complex とし. $\eta: H^n(M;\mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_4$ を cup 積について quadratic な関数とする. この時.

Prop. 2-3. $\sigma(M,\eta)\equiv\eta(v_n)\pmod 4$

ここに. v_n は M の n-th Wu class.

証) $H^n(M;\mathbb{Z}_2)$ を V と書く.

$$\dot{\eta}+\dot{\eta}: V\to\mathbb{Z}_4$$

を考える. $V_v=\{(u+v,u); u\in V\}$ とし, V_v に $\mathbb{Z}_2$-vector space の構造を,

$$(u_1+v,u_1)\dot{+}(u_2+v,u_2)=(u_1+u_2+v,u_1+u_2)$$

で入れる. $2\eta|V_v: V_v\to\mathbb{Z}_4$ を考えると.

$$\begin{aligned}2\eta(u+v,u)&=\eta(u+v)+\eta(u)\\&=\eta(v)+2\cdot\eta(u)+uv\\&=\eta(v)+u^2+uv.\end{aligned}$$

従って. $\dot{\eta}_v: V_v\to\mathbb{Z}_4$ を,

$$\dot{\eta}_v(u+v,u)=2\eta(u+v,u)-\eta(v)$$

で定義すると. これは $\dagger$ について線形. さて もし $u^2+uv=0$ for $\forall u\in V$, ならば $v=v_n$. 従って

$$
\begin{aligned}
\alpha(2\eta) &= \sum_{u\in V}\alpha(2\eta|V_v)\\
&= \sum_{u\in V}\alpha(\eta u)\cdot i^{\eta(u)}\\
&= \alpha(\eta v_n)\cdot i^{\eta(v_n)}\\
&= 2^{\dim V}\cdot i^{\eta(v_n)}\\
&= 2^{\dim V}\cdot\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2\eta(v_n)}.
\end{aligned}
$$

故に.

$$
\begin{aligned}
2\alpha(M,\eta) &= 2\sigma(V,\eta)\\
&= \sigma(V\oplus V,2\eta)\\
&= 2\eta(v_n)
\end{aligned}
$$

故に.

$$\sigma(M,\eta)\equiv\eta(v_n)\pmod 4$$ 終.

系 2-4. M^{2n} を向きづけされた Poincaré complex, n: odd とする. $\eta: H^n(M;\mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_4$ を cup 積について quadratic な関数とする. この時,

$$\sigma(M,\eta)=0 \text{ or } 4.$$

証) n : odd で M : 向きづけられているから
$v_n = 1$. 故に Prop 2-3 より

$$\sigma(M, \eta) \equiv \eta(v_n)$$
$$\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 4) \quad \text{終}.$$

§3. Bockstein スペクトル系列.

M^{4n} を向きづけられた Poincaré complex とし, $\{E_r^*, d_r\}$, $\{E_*^r, d^r\}$ を (co) homology の Bockstein スペクトル系列とする. (係数: $\mathbb{Z}_2$).
この時. Browder [2] により.

Prop. 3-1. i) $\{E_r^*, d_r\}$ と $\{E_*^r, d^r\}$ は Kronecker index について互に dual.

ii) $$E_\infty^* = H^*(M)/Tor \otimes \mathbb{Z}_2,$$
$$E_*^\infty = H_*(M)/Tor \otimes \mathbb{Z}_2.$$

さて, M^{4n} は向きづけられているから,

$$E_1^{4n} = E_2^{4n} = \cdots\cdots = E_\infty^{4n} = \mathbb{Z}_2,$$
$$E_{4n}^1 = E_{4n}^2 = \cdots\cdots = E_{4n}^\infty = \mathbb{Z}_2.$$

$\mu_2 \in E_{4n}^1 = \cdots = E_{4n}^\infty$ を generator (基本類) とする. この時.

Prop. 3-2. $\{E^*_r, d_r\}$ と $\{E_*^r, d^r\}$ について Poincaré duality が成り立つ:

(i) Cup 積 $\mu: E_r^a \otimes E_r^b \to E_r^{a+b}$ が定義される. Cap 積も同様.

(ii) $\cap \mu_2: E_r^k \to E^r_{4n-k}$ は任意の k, r について同型. かつ $d^r(x \cap \mu_2) = d^r x \cap \mu_2$.

(iii) Cup 積

$$\mu: E_r^k \otimes E_r^{4n-k} \to E_r^{4n} = \mathbb{Z}_2$$

は non-singular.

証) (i) $r=1$ の時は明らかが. $r \leq m$ で正しいとし $r = m+1$ の時を証明する.

$$\mu: E^a_{m+1} \otimes E^b_{m+1} \to E^{a+b}_{m+1}$$

を,

$$\mu([x] \otimes [y]) = [\mu(x \otimes y)]$$

と定義する. $(x \in E_m^a,\ d_m x = 0,\ y \in E_m^b,\ d_m y = 0)$

$$d_m(x \cdot y) = d_m x \cdot y + x \cdot d_m y$$
$$= 0$$

で, $d_m x' \cdot y = d_m(x' \cdot y)$ for $x' \in E_m^{a-1}$

だから. μ は well-defined.

Cap 積についても同様.

(ii) 明らかに. $\wedge\mu_2 : E_1^k \rightrightarrows E_{4n-k}^1$.
かつ, $d'(x\wedge\mu_2) = d_1 x\wedge\mu_2 + x\wedge d'\mu_2$
$= d_1 x\wedge\mu_2$.
さて.

$$\wedge\mu_2 : E_r^k \rightrightarrows E_{4n-k}^r$$ で
$$d^r(x\wedge\mu_2) = d_r x\wedge\mu_2 \quad \text{for } \forall r \leq m$$
$$x \in E_r^k$$

と仮定する. この時,

$$\wedge\mu_2 : E_{m+1}^k \to E_{4n-k}^{m+1}$$

を次のように定義する.

$x \in E_m^k$ とし, $d_m x = 0$ とする. このとき.
$[x] \in E_{m+1}^k$, $d^m(x\wedge\mu_2) = d_m x\wedge\mu_2 = 0$. 故に.

$$[x\wedge\mu_2] \in E_{4n-k}^{m+1}.$$

そこで.

$$[x]\wedge\mu_2 = [x\wedge\mu_2]$$

と定義する. これが well-defined である事はすぐにわかる.

(a) $\wedge\mu_2$: 全射.

$[y] \in E_{4n-k}^{m+1}$, $y \in E_{4n-k}^m$, $d_m y = 0$ とする.

この時．∃ $x \in E_m^k$ such that,

$$x \wedge \mu_2 = y.$$

従って，

$$\begin{aligned} 0 &= d^m y \\ &= d^m(x \wedge \mu_2) \\ &= d_m x \wedge \mu_2. \end{aligned}$$

故に．

$$[x] \wedge \mu_2 = [y].$$

(b) $\wedge \mu_2$: 単射．

$[x] \wedge \mu_2 = 0$ とする．すると．

$x \wedge \mu_2 = d^m y$ for some $y \in E^m_{4n-k-1}$.

$x' \in E_m^{k+1}$ を

$$x' \wedge \mu_2 = y$$

なるものとする．すると，

$$\begin{aligned} d_m x' \wedge \mu_2 &= d^m(x' \wedge \mu_2) \\ &= d^m y \end{aligned}$$

故に．

$$\begin{aligned} d_m x' \wedge \mu_2 &= x \wedge \mu_2 \\ x &= d_m x' \\ [x] &= 0. \end{aligned}$$

(c). $d^{m+1}([x]\cap\mu_2)=d_{m+1}[x]\cap\mu_2$.

なぜなら,

$$d_{m+1}([x]\cap\mu_2)=d_{m+1}[x]\cap\mu_2+[x]\cap d^{m+1}\mu_2$$
$$=d_{m+1}[x]\cap\mu_2.$$

(iii) $x\in E_r^k$, $y\in E_r^{4n-k}$ とし,

$x\cdot y=0$ for $\forall x$ とする.

この時,

$$\langle xy,\mu_2\rangle=0$$
$$\langle x,\, y\cap\mu_2\rangle=0$$
$$\therefore\ y=0.$$

終.

§4. 定理 1-1 と 系 1-2 の証明.

$\{E_r^*, d_r\}$, $\{E_*^r, d^r\}$ を $H^*(M)$ と $H_*(M)$ の mod 2 Bockstein スペクトル系列とする. ここに M^{4n} は 向きづけられた Poincaré complex.
我々は 次の命題を r に関する induction で証明する.

(Q_r) $\quad P_2^{(r)} : E_r^{2n} \to \mathbb{Z}_4$ が うまく定義できて．cup 積 $\mu : E_r^{2n} \otimes E_r^{2n} \to E_r^{4n} = \mathbb{Z}_2$ について quadratic であり

$$\sigma(E_r^{2n}, P_2^{(r)}) = \sigma(E_{r-1}^{2n}, P_2^{(r-1)}).$$

$r=1$ の時，(Q_1) は明らかであり，

$$\sigma(E_1^{2n}, P_2) = \sigma(M, P_2).$$

さて，(Q_r) がすべての $r \leq m$ についてなりたつと仮定する．この時，

$$P_2^{(m+1)} : E_{m+1}^{2n} \to \mathbb{Z}_4$$

を次のように定義する．$[x] \in E_{m+1}^{2n}$，$x \in E_m^{2n}$，$d_m x = 0$ のとき，

$$P_2^{(m+1)}[x] = P_2^{(m)}(x).$$

$P_2^{(m+1)}$ が well-defined である事は，

$$P_2^{(m+1)}(\operatorname{im} d_m) = 0$$

を証明すればよい．なぜなら，

$$\begin{aligned} P_2^{(m)}(x + d_m y) &= P_2^{(m)}(x) + P_2^{(m)}(d_m y) + j(x \cdot d_m y) \\ &= P_2^{(m)}(x) + P_2^{(m)}(d_m y) + j\, d_m(x \cdot y) \\ &= P_2^{(m)}(x) + P_2^{(m)}(d_m y). \end{aligned}$$

ここに，$x \in E_m^{2n}$，$d_m x = 0$，$y \in E_m^{2n-1}$．

また $d_m x \in E_m^{2n}$, $x \in E_m^{2n-1}$ とせよ.
すると. x が integral cochain u であらわされて
いる時:

$$\delta u = 2^m \cdot a \qquad \text{for some } a$$

であり. $d_m x$ は $1/2^m \cdot \delta u = a$ であらわされる.
($[a] \in H^{2n}(M; \mathbb{Z})$). そして

$$P_2^{(m)}(d_m x) = P_2[a].$$

ところが. 明らかに $2^m[a] = 0$, 故に
$[a]^2$ は $H^{4n}(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の torsion element.
故に,

$$[a]^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} P_2[a] &= [a]^2 \mod 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

明らかに. $P_2^{(m+1)}$ は Cup 積について
quadratic である.

次に 我々は. $\sigma(E_{m+1}^{2n}, P_2^{(m+1)}) = \sigma(E_m^{2n}, P_2^{(m)})$
を示す. $[x_1], [x_2], \cdots, [x_p]$ を E_{m+1}^{2n} の
basis とし,

$V =$ $x_1, \cdots, x_p$ で はられる E_m^{2n} の
sub vector space. $\left(\begin{array}{l} x_i \in E_m^{2n}, \\ d_m x_i = 0 \end{array} \right.$

$$\overline{V} = \{ y \in E_m^{2n} ;\ x \cdot y = 0 \ \text{for} \ \forall x \in V \}$$

とおく。この時、

Lemma. 4-1. $E_m^{2n} = V \oplus \overline{V}$.

証) もし $x \in V \cap \overline{V}$ とすれば、$x \in V$ より $d_m x = 0$, $[x] \in E_{m+1}^{2n}$. $[y] \in E_{m+1}^{2n}$ を任意の元とする。この時 $y \in V$ としてよく、

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$
$$= 0$$

故に、$[x] = 0$. ところが $V \cap \operatorname{im} d_m = \{0\}$ であるから、$x = 0$. 終.

あとは次元を比較して Lemma を得る。

さて、

$$\sigma(E_m^{2n}, P_2^{(m)}) = \sigma(V, P_2^{(m)}|V) + \sigma(\overline{V}, P_2^{(m)}|\overline{V})$$

であるが、明らかに、

$$\sigma(V, P_2^{(m)}|V) = \sigma(E_{m+1}^{2n}, P_2^{(m+1)})$$

であるから、我々は、

$$\sigma(\overline{V}, P_2^{(m)}|\overline{V}) = 0$$

を証明しさえすればよい。そのためには $\overline{V}$ の sub vector space $A \subset \overline{V}$ で、

(i) $p_2^{(m)}(A) = 0$

(ii) A と cup 積は zero.

(iii) $\dim A = \frac{1}{2} \dim \bar{V}$

なるものを見つければよい．（Cor. 2−2. 参照）．

さて，我々は，

$$im(dm: E_m^{2n-1} \to E_m^{2n}) \subset \bar{V}$$

が，上の三つの条件をみたす事を示す．

(i) は $P_2^{(m+1)}$ の well-definedness の証明より明らかである．

(ii) $dm\,x,\ dm\,y \in im(dm: E_m^{2n-1} \to E_m^{2n})$

とする．すると，

$$\begin{aligned} dm\,x \cdot dm\,y &= dm(x \cdot dm\,y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) まずはじめに．

Lemma. 4−2. $\dim E_m^{2n} = \dim \ker(dm: E_m^{2n} \to E_m^{2n+1})$
$+ \dim im(dm: E_m^{2n-1} \to E_m^{2n})$.

証) (I) $\dim E_m^{2n} = \dim \ker(dm: E_m^{2n} \to E_m^{2n+1})$
$+ \dim im(dm: E_m^{2n} \to E_m^{2n+1})$.

さて，我々は次の事を証明する：

$$(\mathrm{im}(d_m : E_m^{2n} \to E_m^{2n+1}))^{\perp} = \ker(d^m : E^m_{2n+1} \to E^m_{2n}).$$

実際, $\alpha \in (\mathrm{im}(d_m : E_m^{2n} \to E_m^{2n+1}))^{\perp}$ とすれば,

$$\langle d_m x, \alpha \rangle = 0 \quad \text{for } \forall x \in E_m^{2n}.$$

故に,

$$\langle x, d^m \alpha \rangle = 0$$

$$\therefore \quad d^m \alpha = 0$$

$$\alpha \in \ker(d^m : E^m_{2n+1} \to E^m_{2n}).$$

逆に, $d^m \alpha = 0$ とせよ. すると,

$$\langle d_m x, \alpha \rangle = \langle x, d^m \alpha \rangle = 0 \quad \text{for } \forall x.$$

$$\therefore \quad \alpha \in (\mathrm{im}(d_m : E_m^{2n} \to E_m^{2n+1}))^{\perp}.$$

従って,

(2) $$\dim \mathrm{im}(d_m : E_m^{2n} \to E_m^{2n+1}) = \dim E^m_{2n+1} - \dim \ker(d^m : E^m_{2n+1} \to E^m_{2n}).$$

次に, 下の可換な図を考える.

$$\begin{tikzcd}
E^m_{2n+1} \arrow[r, "d^m"] & E^m_{2n} \\
E_m^{2n+1} \arrow[u, "\wr\,\mu_2"] \arrow[r, "d_m"'] & E_m^{2n} \arrow[u, "\wr\,\mu_2"']
\end{tikzcd}$$

それ故我々は.

(3) $\quad \dim E^m_{2n+1} - \dim \ker(d^m : E^m_{2n+1} \to E^m_{2n})$

$$= \dim im(d_m : E_m^{2n-1} \to E_m^{2n})$$

を得る. (1), (2), (3) より Lemma. を得る.

終.

(iii) の証.

$$\dim \overline{V} = \dim E_m^{2n} - \dim E_{m+1}^{2n}$$
$$= \dim \ker d_m + \dim im\, d_m - (\dim \ker d_m - \dim im\, d_m)$$
$$= 2 \dim im(d_m : E_m^{2n-1} \to E_m^{2n})$$

こうして, 我々は,

$$\sigma(E_{m+1}^{2n}, P_2^{(m+1)}) = \sigma(E_m^{2n}, P_2^{(m)})$$

を得た. 従って,

$$\sigma(M, P_2) = \sigma(E_1^{2n}, P_2^{(1)})$$
$$= \sigma(E_\infty^{2n}, P_2^{(\infty)})$$
$$= \text{signature } M \bmod 8.$$

これで定理 1-1 の証明を終わる.

系 1-2 の証.)

Prop. 2-3. により.

$$\sigma(M, P_2) \equiv P_2(v_{2n}) \mod 4$$

故に,

$$\text{signature } M \equiv P_2(v_{2n}) \mod (4)$$

終.

文献

[1] E. H. Brown, Jr. Lecture Note of Summer Institute on Algebraic Topology, Wisconsin, 1970.

[2] W. Browder, Torsion in H-spaces, Ann. of Math. 74 (1961), 24 ~ 51.

University of Tokyo