数理解析研究所講究録
第133巻 1972年 53-58

結合的H-空間のtypeについて

九大理　菅原民生

§1.　H-空間のtype

ここで扱うH-空間はすべて 単連結な有限CW複体と同じhomotopy型をもつ 結合的H-空間とする。

Hopfの定理によって このようなH-空間 X は

$$H^*(X, Q) = \Lambda_Q(x_1, \cdots, x_l), \quad \deg x_i = 2n_i - 1$$

となる。このときの l を X の rank, $(2n_1-1, \cdots, 2n_l-1)$ を X の type という。

問題は、上のようなH-空間のtypeはすべてcompactなLie群のtypeとして得られるものだけかということである。

これについてEwing [2] は Clarkの結果 [1] を拡張することによって、かなり進展させた。それを紹介する。

簡単のため、次のように考察を制限する。二つのH-空間 X_1, X_2 のtypeを A_1, A_2 とするとき, $X_1 \times X_2$ のtypeは $A_1 \cup A_2$ となる。type A が $A_1 \cup A_2$ と分解されないとき simple という。ここでは simple な type のみ扱う。

定理A.

rank l の H-空間の type は

$1 \le l \le 4$ のとき Lie群の type のみ.

$l=5$ のとき Lie群の type 又は

$$\{(3,5,7,11,15),\ (3,7,11,11,15),\ (3,5,5,7,9)\}$$

$l=6$ のとき. Lie群の type 又は

$$\left\{\begin{array}{ll}(3,5,7,11,15,19), & (3,7,7,11,15,19)\\ (3,7,7,9,11,15), & (3,7,7,11,11,15)\\ (3,7,9,11,11,15) & \end{array}\right\}$$

定理B.

各entryは高々1つとし, 最高のentry $2n-1$ は $2n-1>59$ とする。このような H-空間の type は

(i) n が奇数のとき $\{2k-1\ ;\ 2\le k\le n\}$ はすべてentryに入る

(ii) n が偶数のとき

(a) $n \neq 3^k$ $(k\ge 3)$ のとき

$$\{4k-1\ ;\ 1\le k\le \tfrac{n}{2}\}$$ はすべてentryに入る.

(b) $n = 3^k$ $(k\ge 3)$ のとき

$$\{4k-1\ ;\ 1\le k\le \tfrac{n}{2},\ k\neq \tfrac{n}{2}-1\}$$ はすべてentryに入る

§2. $\mathcal{A}_p$ の多項式環への作用

B を Z_p 上の多項式環で mod p Steenrod algebra $\mathcal{A}_p$ が作用しているとする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 1

$\{x_1, \cdots, x_k\}$ を B の生成元全体の部分集合, $\deg x_i = 2m_i$ 各 $m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ とする. $m = (m_1, \cdots, m_k)$ を最大公約数とする。このとき B の生成元の集合 $\{y_1, \cdots, y_k\}$ で, $\deg y_i = 2n_i$, $n_i \equiv 1-p \pmod{m}$ となるものが存在する

証明には次の代数学的な補題を用いる.

補題

R を Noether 環, A をその ideal で r 個の base を持つとする. A の任意の associated 素 ideal P は高々 r の height を持つ。

定理 1 の証明

各 m_i は p で割り切れないから $m_i = a_i + b_i p$, $1 \leq a_i < p$ $0 \leq b_i$ とする。Adem relation によって

$$a_i x_i^p = a_i \mathcal{P}^{m_i} x_i = \mathcal{P}^1 \mathcal{P}^{m_i - 1} x_i$$

をうる。

$$C = Z_p[x_1, \cdots x_k]$$
$$I = \langle \{x_1, \cdots, x_k\}^c \rangle$$

をそれぞれ，$x_1, \cdots, x_k$ で生成されるBの部分環，$x_1, \cdots, x_k$ 以外で生成されるBの ideal とする。任意の生成元 y について $\wp' y \in I$ とすると $x_i^p \in I$ となり矛盾であるから ある生成元 y について $\wp' y \notin I$。このとき $\wp' y = c + S$; $c \in C$, $S \in I$ と分解され，$\deg y + 2(p-1) = \alpha \cdot 2m$ すなわち

$$\frac{\deg y}{2} \equiv 1 - p \pmod{m}$$

をうる。$\{y_1, \cdots, y_d\}$ を $\frac{\deg y_i}{2} \equiv 1-p \pmod{m}$ なる y_i 全体とする。$\wp' y_i = c_i + S_i$; $c_i \in C$, $S_i \in I$ と分解しておく。$y \notin \{y_1, \cdots, y_d\}$ ならば $\wp' y \in I$ に注意しよう。$a_i x_i^p = \wp' \wp^{m_i - 1} x_i$ だから

$$\frac{1}{a_i} \wp^{m_i - 1} x_i = a_{i1} y_1 + \cdots + a_{id} y_d + T_i$$
$$a_{ij} \in C, \quad T_i \in I$$

と表わすことができる。これに $\wp'$ をほどこすと

$$x_i^p = a_{i1} c_1 + \cdots + a_{id} c_d, \quad i = 1, \cdots, k$$

をうる。

$$J = \langle c_1, \cdots, c_d \rangle$$

を $c_1, \cdots, c_d$ で生成される C の ideal とすると $J \ni x_i^p$ だから，J の根基 $\operatorname{rad} J$ は各 x_i を含む。よって

$$\mathrm{rad}\, J = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$$

このheightは k だから補題によって $k \leq d$, すなわち $y_1, \cdots, y_k$ が存在する.

§3 Ewingの定理とその系

X を p-torsionを持たないH-空間とする. BX を X の分類空間とするとBorelの定理によって

$$H^*(BX. \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[y_1 \cdots y_l], \quad \deg y_i = 2n_i$$

となる。$A = (2n_1, \cdots, 2n_l)$ とする。

定理2

$A \ni 2m_1, \cdots, 2m_d$; $m = (m_1, \cdots, m_d)$ とするとき $(k, m) = 1$ なる各 k について

$$2n_1, \cdots, 2n_d \in A. \quad n_i \equiv k+1 \pmod{m}$$

が成り立つ。

証明　$-k+tm = p$ となる素数 p が無数に存在する。(Dirichlet)。p は十分大きく, 従って各 $m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ で, X は p-torsionを持たないとしてよい. よって定理1によって定理2をうる。

$d = 1$ とすることにより次の系をうる。

系3

$A \ni 2m$ とする。$(k, m) = 1$ なる各 k について

$$\exists\, 2n \in A, \quad n \equiv k+1 \pmod{m}.$$

A の最高の entry $2M$ について系3は次のようになる。

系4.

$(k, M) = 1$, $2 \leq k < M$ なる各 k について $2(k+1) \in A$.

定理A, Bは 系4, 系3, 定理2を使うことにより導びかれるが非常に複雑なので省略する.

参考文献

[1] A. Clark, On π_3 of finite dimensional H-spaces. Ann. of Math, 78, (1963), 193-196

[2] J. Ewing, On the type of associative H-spaces. Aarhus univ. Preprint series 1970/71 No. 15