数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 1-5

Crandall-Liggett の結果と残された問題

お茶大理　高村幸男

作用素の半群の理論において，最も重要なものは半群生成の問題である。この意味から，Banach 空間 X における非線形半群の生成について，加藤の条件（共役空間 X^* が一様凸であること）を省き得るかどうかが，理論上も応用にも，最大の懸案であったが，昨年 Crandall-Liggett [1] によって解決されたことは，すでによく知られていることと思う。念のため示すと（宮寺 [3] も参照）

定理　Banach 空間 X における（多価）作用素 A が

1. A は accretive
2. $\mathcal{R}(I+\lambda A) \supset \mathcal{D}(A)$　　$\forall \lambda > 0$

をみたせば

$$T_t x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n} x$$

はすべての $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ に対して存在し，$\{T_t\}$ は $\overline{\mathcal{D}(A)}$ 上の半群を与える

系　吉田近似　$\frac{d}{dt}u_n(t) = A_n u_n(t)$，　$u_n(0) = x \in \mathfrak{D}(A)$ の解 $u_n(t)$ は上の $T_t x$ に広義一様に収束する。

空間 X が回帰的な場合には、この半群 $\{T_t\}$ は対応する発展方程式

(3)　$\frac{d}{dt}u(t) \in -Au(t)$，　$u(0) = x \in \mathfrak{D}(A)$

の一意の解 $u(t) = T_t x$ を与えるが、X が回帰的でなければ、この発展方程式は必ずしも解をもたない。$T_t x$ はすべての $t > 0$ に対して微分可能でもなければ $\mathfrak{D}(A)$ にも属さない、といったことがおこり得る。

したがってまず次のことが問題となる。

問題 I.　C.-L. の半群は (3) の如何なる意味での解になるか（A は如何なる意味の生成作用素か）。

これに答えることは易しくないが、Crandall 氏は発展方程式 (3) を X^{**} で考察することを試みていた。筆者はこれに対し X を可分に限定して（一般性は失われない），X^* の部分空間で、強位相で可分，X からの弱位相で稠密なもの X' を一つ定め，X'^* で考察することを提案した。これは X'^* が一意にきまらないという不利はあるが，$T_t x$ の導函数，その可測性などを考えるとき X^{**} より有利である。以下

もう少し具体的な形で説明しよう。

X が可分 Banach空間であれば、$C[0,1]$ のある部分空間にノルム同型となる。よって $X \subset C[0,1]$ と考えることにする。$M[0,1] = C^*[0,1]$ の可分部分空間 $L^1[0,1]$，その共役 $L^\infty[0,1]$ をとり、発展方程式 (3) を $L^\infty[0,1]$ で考える。半群 $\{T_t\}$，$x \in \mathcal{D}(A)$ に対し $u(t,\lambda) = T_t x$，$\lambda \in [0,1]$，は t について Lipschitz 連続であるから、各 $\lambda \in [0,1]$ に対し $u(t,\lambda)$ は殆んどすべての t について微分可能で

$$\frac{d}{dt}u(t,\lambda) \in L^\infty[0,1] \qquad a.\ e.\ t$$

となる。$T_t x$ が X において微分不能というのは，$\frac{d}{dt}u \notin C[0,1]$ を意味する。また $T_t x$ の微分を X^{**} で考察するのは $\frac{d}{dt}u(t,\lambda)$ を $M^*[0,1]$ で考察することで，話が非常に難しくなる。

しかしこの idea は (3) の右辺 $AT_t x$ を考えるとき壁につき当る。A の $L^\infty[0,1]$ における適当な拡張 $\tilde{A}$ を定義し

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}u(t,\lambda) \in -\tilde{A}\,u(t,\lambda)$$

としたい訳であるが、例えば

$$\tilde{A}x = \{y \in L^\infty \mid \mathcal{D}(A) \ni {}^{\exists}x_n \to x\,(強),\ Ax_n \ni {}^{\exists}y_n \to y\ (弱)\}$$

と定義すれば，我々の $u(t,\lambda)$ は確に (4) の解であるが，

$\widetilde{A}$ は一般にはもはや accretive ではなく、(4) の解が一意かどうか不明である。

問題 II. Crandall-Liggett-Miyadera の定理は具体的な偏微分方程式にどこまで有効か？

従来の L^p $(1 < p < \infty)$ から (C), L^1, L^∞ まで適用範囲が広くなったので、興味ある結果が得られつゝあり、現在もっとも建設的な研究方向と思われる。具体的な偏微分方程式に適用する際には、解 $u(t, x)$ は（$C[0,1]$ や $L^\infty[0,1]$ とは限らないが）函数空間の値をとる（t について）Lipschitz 連続な函数となるので、可微分性の議論は易しくなることも多いと思われる。

問題 III. Banach 空間における非線形半群の Hille-吉田の定理を求む。

これは問題 I が解けてからの問題である。重要なところは生成の逆問題，即ち，Banach 空間における contraction の半群がはたして（C.L. の意味でよいが）生成作用素をもつかどうか、である。C.L. の意味の生成作用素は必ずしも一意でない。また、生成作用素の存在証明については、Hilbert 空間のときと同様な技巧は通用しないことが分

っているので、このことが正しいとしても別の証明法が発見されなければならない。現状ではBanach空間の非線形作用素に関する我々の知識が不足のようなので、将来の問題としておきたい。

[1] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math. XCIII p 265 -- 298 (1971)

[2] ———————————, A theorem and a counterexample in the theory of semi-groups of nonlinear transformations, to appear.

[3] I. Miyadera, Some remarks on semi-groups of nonlinear operators, Tôhoku Math. J. 23 p 245 - 258 (1971)