数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 15-17

Weakly coupled diffusion system の半群的取扱いについて

東大・理　小西芳雄

§1. 序.

山口,亀高,三村[4]は Weakly coupled diffusion system の典型的な例として次の(イ)〜(ホ)を挙げている。

(イ) $\begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u - uv \\ \partial v/\partial t = \Delta v - uv \end{cases}$　(ロ) $\begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u + uv \\ \partial v/\partial t = \Delta v - uv \end{cases}$　(ハ$_1$) $\begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u \\ \partial v/\partial t = \Delta v - uv \end{cases}$

(ハ$_2$) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -uv \\ \partial v/\partial t = \Delta v - uv \end{cases}$　(ニ) $\begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u + uv \\ \partial v/\partial t = -uv \end{cases}$　(ホ) $\begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u - uv \\ \partial v/\partial t = uv \end{cases}$

解の行動を研究をするための第一歩として,筆者と大春氏は,これらの右辺の作用素が例えば $C(R^n)^+ \times C(R^n)^+$ などで Crandall-Liggett [2] の意味で非線型半群を生成するか否かということに興味を持った。(イ),(ロ),(ハ)については,簡単に,肯定的であることが判った。(ニ)と(ホ)は少々いやらしい。しかしながら Chambers

Oharu [1] に於いて導入されたD-operatorなる概念を使うことにより本質的には，Crandall-Liggettにより開発されたテクニックに帰着されることがわかった。

§2. 生成定理

X をバナッハ空間とする。C を X の部分集合とする。C から C への作用素の族 $\{T_t ; 0 \leq t < +\infty\}$ が<u>半群</u>（C 上の）であるとは，

(i) $T_0 = I|C$ 且 $T_{t+s} = T_t T_s \quad \forall t \forall s \geq 0$;

(ii) $\forall x \in C$ に対し $T_t x$ は t に関し強連続。

X に定義域と値域をもつ（非線型，多価）作用素が <u>D-operator</u> であるとは，

(D) $(0, \infty)$ 上の非負函数 $\omega = \omega(r)$ が存在し $A|B_r - \omega(r) I$ が各 $r > 0$ に対し dissipative;

但し $B_r = \{x \in X ; \|x\| < r\}$.

<u>定理</u> A を X のD-operatorとし 或る正値函数 $\rho = \rho(r, T)$ $r \in (0, \infty)$, $T \in (0, \infty)$, が存在し 各 $n > 2T\omega(\rho(r,T))$ に対し次の (S_n) が成立すると仮定しよう：

(S_n) 方程式系 $x_\lambda^{(1)} - \lambda A x_\lambda^{(1)} \ni x$, $x_\lambda^{(2)} - \lambda A x_\lambda^{(2)} \ni x_\lambda^{(1)}, \cdots,$ $x_\lambda^{(n)} - \lambda A x_\lambda^{(n)} \ni x_\lambda^{(n-1)}$ は各 $x \in B_r \cap \overline{D(A)}$ と $\lambda \in (0, T/n]$ に対し解 $\{x_\lambda^{(1)}, x_\lambda^{(2)}, \ \ , x_\lambda^{(n)}\}$, $x_\lambda^{(i)} \in B_{\rho(r,T)} \cap D(A)$ をもつ。

このとき 各 $r, T > 0$ に対し

$$\exp(tA)x = \lim_{n\to\infty} \{I - (t/n)A|_{B_{\rho(r,T)}}\}^{-n} x, \quad 0 \le t \le T,$$

$x \in B_r \cap \overline{D(A)}$,

は存在し $\{\exp(tA); 0 \le t < \infty\}$ は $\overline{D(A)}$ 上の半群である。
さらに収束は $t \in [0, T]$ に関し一様で、各 $t \ge 0$ に対し
$\exp(tA)$ は局所 Lipschitz 連続である:

$$\|\exp(tA)x - \exp(tA)y\| \le \exp[\omega(\rho(r,T))t] \cdot \|x-y\|,$$

$0 \le t \le T$, $x, y \in B_r \cap \overline{D(A)}$, $T, r > 0$.

また $\exp(tA)x$, $x \in D(A)$, は t に関し局所 Lipschitz 連続である。

証明の概略は Konishi [3] 参照。(ニ),(ホ) が半群を生成するための条件を満足しているかの検証はそんなに困難ではない。(やはり [3] に書いてある。)

文献

[1] J.T. Chambers and S. Oharu: Semi-groups of local Lipschitzians in a Banach space (to appear).

[2] M.G. Crandall and T.M. Liggett: Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces (to appear).

[3] Y. Konishi: A remark on semi-groups of local Lipschitzians in Banach space (pre-print).

[4] 山口, 亀高, 三村: Weakly coupled diffusion system について. 数理科学講究録 106, 167-177.