数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 51-62

ヒルベルト空間の中の放物型方程式について

阪大 理 田辺広城

Hilbert 空間の中で双一次型式により定義された作用素 $A(t)$ を係数に持つ発展方程式 $u'(t)+A(t)u(t)=f(t)$ に関する若干の注意を述べる．

1. 線型方程式

X を Hilbert 空間，その内積，ノルムを $(\ ,\ )$，$|\ |$ で表わす．V は X の稠密な部分空間でそれ自身内積 $((\ ,\ ))$，ノルム $\|\ \|$ で Hilbert 空間になっているものとする．各 $0\leq t\leq T$ に対し $a(t;u,v)$ は $V\times V$ で定義された双一次型式で正の数 M, δ が存在して

$$|a(t;u,v)|\leqq M\|u\|\|v\| \qquad (1)$$

$$\mathrm{Re}\, a(t;u,u)\geqq\delta\|u\|^2 \qquad (2)$$

が各 $u,v\in V$ に対して成立するとする．V^* を V の反共役空間，即ち V で定義された反線型：

$$f(u+v)=f(u)+f(v),\quad f(\lambda u)=\bar{\lambda}f(u)$$

な連続汎関数全体，V^*のノルムを$\| \ \|_*$で表わす．X^*をXと同一視して　$V \subset X \subset V^*$　と考えることができる．

(1) により各 $t \in [0, T]$ に対し

$$a(t; u, v) = (A(t)u, v) \tag{3}$$

によってVからV^*への連続線型写像$A(t)$が定義される．ただし右辺の括弧はV^*とVとの間の積を表わす．

$$D(A(t)) = \{u \in V : A(t)u \in X\}$$

とおき　$A(t)$を　$D(A(t))$　に制限すると　$A(t)$　はXでの閉作用素になる．かく制限したものを同じ記号$A(t)$で表わす．

Xでの発展方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t) \tag{4}$$

の初期値問題を考える．(4)を解くためには更に$a(t; u, v)$のtに関する滑らかさを仮定しなければならない．そこで先ず Hölder 連続性即ちある正の数 K, ρ に対し

$$|a(t; u, v) - a(s; u, v)| \leqq K|t-s|^\rho \|u\| \|v\| \tag{5}$$

を仮定して (4)をV^*の中の方程式と見て基本解を構成し，$\rho > 1/2$ ならばその基本解はXの中の方程式と見た (4) の基本解になっていることを示す．

予備定理 1.1.　$A(t)$はX及びV^*の中で解析的半群を生成する．即ちある角 $0 < \theta < \pi/2$ が存在しX及びV^*での作用素と見た$A(t)$の resolvent set $\rho(A(t))$ は閉角領域

$$\Sigma = \{\lambda : \ \theta \leqq \arg \lambda \leqq 2\pi - \theta\}$$

を含み　$\lambda \in \Sigma$　のとき

$$|(\lambda - A(t))^{-1} f| \leqq \frac{C}{|\lambda|} |f| \tag{6}$$

$$\|(\lambda - A(t))^{-1} f\|_* \leqq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_* \tag{7}$$

が各 $f \in X$ あるいは $f \in V^*$ に対して成立する．$\tau > 0$ のとき

$$\exp(-\tau A(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\lambda\tau} (\lambda - A(t))^{-1} d\lambda$$

によって定義される作用素の族は各固定された t に対し解析的半群をなす．ここに Γ は Σ の中で $\infty e^{(2\pi-\theta)i}$ と $\infty e^{\theta i}$ とを結ぶ滑らかな曲線である．

$A(t)$ を X の中の作用素と見るとその定義域 $D(A(t))$ は一般には t と共に変わるが V^* の中の作用素としてはその定義域 V は t に無関係である．このことに着目して V^* の中の方程式と見た (4) の基本解 $U(t,s)$ を次の様に構成する．

$$U(t,s) = \exp(-(t-s)A(s)) + W(t,s), \tag{8}$$

$$W(t,s) = \int_s^t \exp(-(t-\tau)A(\tau)) R(\tau,s) d\tau, \tag{9}$$

$$R(t,s) = \sum_{m=1}^\infty R_m(t,s), \tag{10}$$

$$R_1(t,s) = -(A(t) - A(s)) \exp(-(t-s)A(s)) \tag{11}$$

$$R_m(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau) R_{m-1}(\tau,s)\,d\tau. \tag{12}$$

(5) により

$$\| A(t)u - A(s)u \|_* \leqq K|t-s|^\rho \|u\| \tag{13}$$

となるから

$$\| R_1(t,s) f \|_* \leqq C(t-s)^{\rho-1} \|f\|_*,$$

$$\| R(t,s) f \|_* \leqq C(t-s)^{\rho-1} \|f\|_*$$

が成立することは容易にわかり，従って (8)—(12) により V^* から V^* への有界作用素として $U(t,s)$ が定義され，更に

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) f \right\|_* \leqq \frac{C}{t-s} \|f\|_*, \quad 0 \leqq s < t \leqq T, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s) + A(t)U(t,s) = 0, \quad 0 \leqq s < t \leqq T, \tag{15}$$

$$U(s,s) = I, \qquad 0 \leqq s \leqq T, \tag{16}$$

が成立することが示される。詳しくは [3] あるいは [4] 参照． f を X の任意の元とすると $\lambda \in \Sigma$ のとき

$$\| (\lambda - A(t))^{-1} f \| \leqq C|\lambda|^{-1/2} |f|$$

となることから

$$\| R_1(t,s) f \|_* \leqq C(t-s)^{\rho-1/2} |f|, \tag{17}$$

$$\| R(t,s) f \|_* \leqq C(t-s)^{\rho-1/2} |f|, \tag{18}$$

$$| \exp(-(t-\tau)A(\tau)) f | \leqq C(t-\tau)^{-1/2} \|f\|_* \tag{19}$$

がわかる．従って

$$|W(t,s)f| \leqq C(t-s)^{\rho}|f|, \qquad (20)$$

$$|U(t,s)f| \leqq C|f|$$

となり $U(t,s)$ は X から X への一様有界な写像であることがわかる．以上の仮定だけからは $\|\ \|_*$ を $|\ |$ で置き換えて (14) が成立するかどうかはわからない．併し $\rho > 1/2$ ならばそれは正しいことが次の様にして示される．

$$|\{A(t)\exp(-(t-\tau)A(t)) - A(\tau)\exp(-(t-\tau)A(\tau))\}f|$$

$$\leqq C(t-\tau)^{\rho-3/2}\|f\|_*,$$

$$|A(t)\exp(-(t-\tau)A(t))f| \leqq C(t-\tau)^{-3/2}\|f\|_*,$$

$$\|R(t,s)f - R(\tau,s)f\|_*$$

$$\leqq C\left\{(t-\tau)^{\rho}(t-s)^{-1/2} + (t-\tau)^{\rho}(t-s)^{\rho-1/2}\log\frac{t-s}{t-\tau}\right\}|f|,$$

$$|\exp(-(t-s)A(t))f| \leqq C(t-s)^{-1/2}\|f\|_*$$

と (18) により

$$(\partial/\partial t)W(t,s)f$$

$$= \int_s^t \{A(t)\exp(-(t-\tau)A(t)) - A(\tau)\exp(-(t-\tau)A(\tau))\}$$

$$\times R(\tau,s)f\,d\tau$$

$$- \int_s^t A(t)\exp(-(t-\tau)A(t))\,(R(\tau,s) - R(t,s))f\,d\tau$$

$$+ \exp(-(t-s)A(t))\,R(t,s)f$$

の各項のノルムを評価して

$$|(\partial/\partial t)W(t,s)f| \leqq C(t-s)^{\rho-1}|f|$$

を得る．これと(8)とから

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)f\right| \leqq \frac{C}{t-s}|f| \qquad (22)$$

を得る．以上まとめて

定理1.1. 仮定(1),(2),(5)のもとで V^* の中の方程式と見た(4)の基本解 $U(t,s)$ が存在し(14)と(21)を満足する．更に $\rho > 1/2$ ならばこの基本解は X の中の方程式と見た(4)の基本解でもあり(22)を満足する．

注意．この基本解を使って $f(t)$ がHölder連続ならば $u(0)=\phi$ を満足する(4)の解は

$$u(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

により表わされる．解がこれに限ることも示される．[3]あるいは[4]参照．

2. 半線型方程式

次に $A(t)$ は前節の作用素として半線型方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t,u(t)) \qquad (23)$$

$$u(0)=\phi \qquad (24)$$

の広義解の存在と一意性を考える．ここで言う広義解とは積分方程式

$$u(t)=U(t,0)\phi+\int_0^t U(t,s)\,f(s,u(s))\,ds \qquad (25)$$

の解を指す．$I=[0,T]$ と書く．この節では $\rho>1/2$ は仮定しない．

f に関する仮定：　$f(t,u)$ は $I\times V$ から V^* への有界，demicontinuous，単調即ち各 $u, v\in V$ に対し

$$\mathrm{Re}\,(f(t,u)-f(t,v),\ u-v)\leqq 0 \qquad (26)$$

が成立する．

この仮定のもとで [1] の方法に従って解の存在を示す．

予備定理 2.1.　$\phi\in X$，$f\in L^2(I,V^*)$ のとき

$$u(t)=U(t,0)\phi+\int_0^t U(t,s)f(s)\,ds \qquad (27)$$

とおくと $u\in C(I,X)\cap L^2(I,V)$，

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2-\frac{1}{2}|\phi|^2+\int_0^t \mathrm{Re}\,a(s;u(s),u(s))\,ds$$

$$=\int_0^t \mathrm{Re}\,(f(s),u(s))\,ds.$$

証明は (27) が Lions [2] 第4章の意味での (4) の解であることを示し，同書同章にある定理を用いるか，あるいは f が $C^{(1)}(I,V^*)$ の元である場合に先ず証明し，次に一般の

fに対してはそれを $C^\infty(I, V^*)$ の元の列で近ずけることによりなされる。

$(\Lambda u, v) = ((u, v))$ により定義される作用素 Λ は X, V^*の各々で自己共役正定符号。X では $D(\Lambda^{1/2}) = V$, V^*では $D(\Lambda^{1/2}) = X$, $I_n = (1 + n^{-1}\Lambda^{1/2})^{-1}$ とおくと I_n は X から V への，V^* から X への有界作用素，$n \to \infty$ のとき X, V^*の各々で恒等作用素に強収束する。$f_n(t, u) = I_n f(t, I_n u)$ とおくと f_n は $I \times X$ から X への有界，demicontinuous，単調作用素である。$a(t; u, v)$ に軟化作用素を作用させて t に関し微分可能な双一次型式列

$$a_n(t; u, v) = \int \rho_n(t-s)\, a(s; u, v)\, ds$$

で $a(t; u, v)$ を近似する。$a_n(t; u, v)$ により定められる作用素を $A_n(t)$ とすると方程式

$$du(t)/dt + A_n(t)u(t) = f_n(t, u(t))$$

に [1] の結果が使えて広義解 $u_n \in C(I, X)$ が存在する：

$$u_n(t) = U_n(t, 0)\phi + \int_0^t U_n(t, s) f_n(s, u_n(s))\, ds \quad (28)$$

予備定理 2.1 及び (2) により

$$|u_n(t)|^2 + \delta \int_0^t \|u_n(s)\|^2 ds$$
$$\leqq |\phi|^2 + \frac{1}{\delta} \int_0^t \|f_n(s, 0)\|_*^2 ds$$

$$\leqq |\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|f(s,0)\|_*^2\, ds.$$

従って $\{u_n\}$ は $C(I,X)$, $L^2(I,V)$ の各々で有界である。従って f に関する仮定により $\{f_n(\cdot,u_n(\cdot))\}$ は $L^\infty(I,V^*)$ で有界である。従って部分列があって $L^2(I,V)$ で $u_n \rightharpoonup u$ (ここで部分列を再び $\{u_n\}$ と書き, $\rightharpoonup$ は弱収束を意味する), $L^2(I,V^*)$ で $f_n(\cdot,u_n(\cdot)) \rightharpoonup g$ となる。

予備定理 2.2.

$$(U_n f)(t) = \int_0^t U_n(t,s) f(s)\, ds,$$

$$(Uf)(t) = \int_0^t U(t,s) f(s)\, ds$$

により $L^2(I,V^*)$ から $L^2(I,V)$ への有界作用素 U_n, U を定義すると $n \longrightarrow \infty$ のとき $\{U_n\}$ は U に強収束する。

証明は予備定理 2.1 を用いて容易にできる。

この予備定理は $A_n(t)$, $A(t)$ をその共役で置き換えて, 従って $U_n(t,s)$, $U(t,s)$ をその共役で置き換えても成立する。そのことに注意して

$$\int_0^t U_n(t,s) f_n(s,u_n(s))\, ds - \int_0^t U(t,s) g(s)\, ds$$

$$= \int_0^t (U_n(t,s) - U(t,s)) f_n(s,u_n(s))\, ds$$

$$+ \int_0^t U(t,s)\,(f_n(s,u_n(s)) - g(s))\,ds$$

は $L^2(I,V)$ で 0 に弱収束することがわかる．これと (28) から

$$u(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,s)\,g(s)\,ds$$

が得られる．次に $f \in L^2(I,V^*)$,

$$w(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,s)\,f(s)\,ds$$

とおくと予備定理 2.1 により

$$\frac{1}{2}\,|u_n(T) - w(T)|^2$$

$$+ \mathrm{Re}\int_0^T a_n(t;\, u_n(t) - w(t),\ u_n(t) - w(t))\,dt$$

$$= -\mathrm{Re}\int_0^T ((A_n(t) - A(t))\,w(t),\ u_n(t) - w(t))\,dt$$

$$+ \mathrm{Re}\int_0^T (f_n(t,u_n(t)) - f(t),\ u_n(t) - w(t))\,dt$$

であるが

$$(f_n(t,u_n(t)) - f(t),\ u_n(t) - w(t))$$

$$= (f(t, I_n u_n(t)) - f(t, w(t)),\ I_n u_n(t) - w(t))$$

$$+ (I_n f(t) - f(t),\ u_n(t) - w(t))$$

$$+ (f(t, I_n u_n(t)) - f(t),\ w(t) - I_n w(t))$$

$$+ (f(t, w(t)) - f(t), \ I_n u_n(t) - w(t))$$

と分解し，fが単調であることを用いて

$$0 \leqq -\mathrm{Re} \int_0^T ((A_n(t) - A(t)) w(t), u_n(t) - w(t))\, dt$$

$$+ \mathrm{Re} \int_0^T (I_n f(t) - f(t), \ u_n(t) - w(t))\, dt$$

$$+ \mathrm{Re} \int_0^T (f(t, I_n u_n(t)) - f(t), \ w(t) - I_n w(t))\, dt$$

$$+ \mathrm{Re} \int_0^T (f(t, w(t)) - f(t), \ I_n u_n(t) - w(t))\, dt$$

となる．ここで $n \to \infty$ として

$$0 \leqq \mathrm{Re} \int_0^T (f(t, w(t)) - f(t), u(t) - w(t))\, dt.$$

ここで f は $L^2(I, V^*)$ の任意の元であったことに注意し，通常の単調性論法を用いて，u が求める解であることが示される．解の一意性も容易に示される．

[1] T. Kato: Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Appl. Math., XVII, 50—67.

[2] J. L. Lions: Équations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, 1961.

[3] P. E. Sobolevskii: Equations of parabolic

type in a Banach space, Trudy Moscow Math. Obsc. 10 (1961), 297–350, AMS. Translations 49 (1966), 1–62.

[4] H. Tanabe: On the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J., 12 (1960), 363–376.