数理解析研究所講究録
第136巻 1972年 111-118

Fourier 級数と "Fractional Integration"

東北大 教養 渡利 千波

§1. Introduction.

$f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 級数を

$$S[f] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x)$$

とするとき，f の Poisson 積分 $f(r, x)$ はつぎの式で与えられる：

$$f(r, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x)\, r^\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\, dt$$

ここで $r = e^{-\xi}$ $(0 < \xi < \infty)$ とおけば

$$P_\xi : f(\cdot) \longrightarrow f(e^{-\xi}, \cdot)$$

は L^1 から C^∞ への（したがってもちろん L^1 への）linear operator で，iteration により (contraction) semi-group をなしている。生成作用素 A は $f \in C^1$ に対しては定義され

$$Af(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu A_\nu(x)$$

である。後述するように $(-A^{-1})^\alpha$ は fractional integration と類似の性質をもつが，$\alpha > 0$ の範囲でこの作用素を反復して

得られる semi-group の生成作用素を B として，$(-B^{-1})^{\beta}$ を考えると，"fractional integration of logarithmic scale" ともいうべき multiplier transformation が得られる。ここではこの変換がもつ fractional integration に似た若干の性質を考察し，補間空間の「目盛」に「副尺」を提供する可能性をしらべたい。

以下においては，つぎの記号を用いる。

$\sum_n$: n 次以下の実係数三角多項式全体

$E_n^{(p)}(f) = \inf\{\|f-T\|_p : T\in\sum_n\}$ （L^p-最良近似）

$(\tau_h f)(x) = f(x+h) \qquad \tau_h^j f = \tau_h(\tau_h^{j-1} f)$

$(\Delta_h^k f)(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau_h^j f(x)$

$\omega_k^{(p)}(\delta; f) = \sup\{\|\Delta_h^k f\|_p : |h|\leq\delta\}$

$\mathrm{Lip}_k^{(p)}\alpha = \{f : \omega_k^{(p)}(\delta : f) = O(\delta^\alpha) \text{ as } \delta\to+0\}$

（$k=1$ のときは添数 1 を省略することがある。）

§2. "Fractional Integration" の定量的性質

前節に述べたように，$(-A^{-1})^{\alpha}f$ を考察する．$(-A^{-1})^{\alpha}$ を f に作用させることは，f と

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\cos nx$$

との convolution を作ることである．$f_\alpha = I_\alpha * f$ とおく。

$$f_\alpha(x) = (I_\alpha * f)(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}A_n(x) \qquad (\alpha>0)$$

であるが，右辺の級数が意味をもつ場合には，$\alpha < 0$ に対してもこの記法を流用する。

定理 1．　$0 \leqq \alpha < 1$，$\beta > 0$，$f \in \mathrm{Lip}^{(p)} \alpha$　とする。このとき $\alpha + \beta < k$　（正整数）であれば　$f_\beta \in \mathrm{Lip}^{(p)}_k (\alpha + \beta)$ である。

定理 2．　$0 < \gamma < \alpha < k$，　$f \in \mathrm{Lip}^{(p)}_k \alpha$　とする。このとき，$\alpha - \gamma < l$　をみたす正整数 l に対して　$f_{-\gamma} \in \mathrm{Lip}^{(p)}_l (\alpha - \gamma)$ である。

以上の二定理は，いずれも古典的な Hardy-Littlewood の定理に，若干の（本質的ではない）拡張を加えたものであり，たとえば A. Zygmund [5] XII 章 (8.13)，(8.14) の所論を修正しても証明できるが，後に引用する都合上，近似論の立場からの証明の方針を述べておくことにする。

補題 1．　$\alpha \leqq k$，$f \in \mathrm{Lip}^{(p)}_k \alpha$　であれば　$E^{(p)}_n (f) = O(n^{-\alpha})$

証明は A. F. Timan [2] §5. 1. 31 と同様に計算すれば得られる。

補題 2．　$\omega^{(p)}_k \left(\frac{1}{n} ; f^{(r)} \right) \leqq \mathrm{const.} \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k+r} E^{(p)}_\nu (f) + \mathrm{const.} \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \nu^{r-1} E^{(p)}_\nu (f)$

ただし右辺の級数は収束するものとする。

（Timan [2]，§6. 1. 1.）

補題2の証明の中心になるのは Bernsteinの不等式:

補題3. $T \in \mathfrak{T}_n$ に対して $\|T^{(k)}\|_p \leqq n^k \|T\|_p$

であるが、この証明を少し修正して、つぎの補題が得られる。([4])

補題4. $\alpha > 0$, $T \in \mathfrak{T}_n$ に対して $\|T_{-\alpha}\|_p \leqq K_\alpha n^\alpha \|T\|_p$

定理1の証明. よく知られたように(たとえば [1] Lem. 3.1 あるいはいわゆる generalized Minkowski inequality から)

$$\|\varphi * \psi\|_p \leqq \|\varphi\|_1 \ \|\psi\|_p$$

である. $\varphi = I_\beta - T$ ($T \in \mathfrak{T}_n$, L^1-最良近似多項式) $\psi = f - P$ ($P \in \mathfrak{T}_n$ f の L^p-最良近似多項式) とすると

$$E_n^{(p)}(f_\beta) \leqq E_n^{(1)}(I_\beta)\ E_n^{(p)}(f) = O(n^{-\alpha-\beta})$$

である. これを補題2に代入して求める結果が得られる.

定理2の証明. 補題2の証明を、補題3のかわりに補題4を用いてやり直せばよい.

§3. "Fractional Integration" の定性的性質

前節の結果は、いわば「函数族の平行移動」とでもいうべきもので、

証明に際しても、やや克明な計算だけで十分であった。本節では、より深いつぎの定理を目標とするが、他にも同じ定理に関する講演があるので、証明は方針を述べるだけとする。

定理3. $1<p<q<\infty$, $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. $f\in L^p$ とする。このとき $f_\alpha\in L^q$ で、かつ $\|f_\alpha\|_q \leqq K_{p,q}\|f\|_p$ である。

Zygmund[5] XII章§9 に、complex method による証明があり、それによれば f が of power series type であれば $p=1$ においても結果が成立する。ここでは多変数の場合にも適用できる証明の方針を述べる。[3])

1° (Paley の不等式) $\left(\sum |\nu|^{p-2}|c_\nu|^p\right)^{1/p} \leqq K_p\|f\|_p$ $\quad 1<p\leqq 2$

2° (Hausdorff-Young の不等式) $\left(\sum |c_\nu|^{p'}\right)^{1/p'} \leqq \|f\|_p$

3° $1<p<2$, $q=2$, $\alpha=\frac{2-p}{2p}$ であれば、Hölder で

$$\|f_\alpha\|_2 = \left\{\sum|\nu|^{-2\alpha}|c_\nu|^2\right\}^{1/2} \leqq \left(\sum|\nu|^{-2\alpha p}|c_\nu|^p\right)^{1/p}\left(\sum|c_\nu|^{p'}\right)^{1/p'}$$

この右辺に 1°, 2° を適用すればよい。

4° $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}$ であれば、conjugacy によって 3° の場合に帰着される。

5° $0<\alpha<1$ を固定するとき、$f\to f_\alpha$ は of weak type $\left(1, \frac{1}{1-\alpha}\right)$ の線型作用素である。

通常の fractional integration においては A. Zygmund[6] による。

その証明を少し修正し，途中で 4° を用いる．証明の核心は Marcinkiewicz, Calderón-Zygmund, Hörmander, Igari 流の分解で，f を "good part" と "bad part" に分け，前者は 4° で処理し，後者は「support が小さい」ことで処理する。

6°　一般の場合は Marcinkiewicz の補間定理と，conjugacy による。

§4.　Logarithmic scale の "Fractional Integration"

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \sum_{\nu=2}^{\infty} (\log \nu)^{-\alpha} \cos \nu x$$

を核とする convolution operator を L_α とする．$\alpha > 0$ であれば L_α は L^1 全体に定義されるが，$\alpha < 0$ に対しても十分よい函数は $D(L_\alpha)$ に属する。　$L_\alpha f = f_\alpha^*$ と書くことにする．

定理 4.　$\omega_k^{(p)}(\delta; f) = O(|\log \delta|^\alpha)$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ とする。このとき　$\omega_k^{(p)}(\delta : f_\beta^*) = O(|\log \delta|^{\alpha+\beta})$　$(\delta \to +0)$.

証明は定理 1 と同様である．　$E_n^{(1)}(J_\alpha) = O((\log n)^{-\alpha})$ を示して，補題 1 を適用する．計算はやや冗長になるが，初等的である。定理 2 に相当するつぎの定理は，単に一つの十分条件を与えるだけで，最終的な形であるか否かは疑問である．ただ，目盛の性格から，

まったく同じような形の結果は期待できないと思われる。

定理5. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha} E_{2^\nu}^{(p)}(f) < \infty$ であれば, $f \in D(L_{-\gamma})$ $(0 < \gamma \leqq \alpha)$ かつ $E_{2^n}^{(p)}(f_{-\gamma}^{*}) = O\left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{\gamma} E_{2^\nu}^{(p)}(f)\right)$

補題5. $T \in \mathfrak{T}_n$ のとき $\|T_{-\gamma}^{*}\|_p \leqq K_\gamma (\log n)^\gamma \|T\|_p$

証明は Zygmund[ ] Ⅲ章 (13.16) と同様にすればよい。

定理5. の証明 M, N を正整数, $T_n \in \mathfrak{T}_n$ を最良近似多項式とするとき

$$\left\| J_{-\gamma} * \sum_{M}^{N} (T_{2^{n+1}} - T_{2^n}) \right\|_p \leqq \sum_{M}^{N} \| J_{-\gamma} * (T_{2^{n+1}} - T_{2^n}) \|_p$$

補題5 と $\|T_{2^{n+1}} - T_{2^n}\|_p \leqq 2 E_{2^n}^{(p)}(f)$ とから, 上式の右辺は

$$K_\gamma \sum_{M}^{N} n^\gamma E_{2^n}^{(p)}(f) \qquad (\to 0 \quad \text{as} \quad M, N \to \infty)$$

をこえない。$\gamma \leqq \alpha$ に対しては

$$f_{-\gamma}^{*} = \underset{N\to\infty}{\overset{(p)}{\mathrm{l.i.m.}}} \left(T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (T_{2^{n+1}} - T_{2^n}) * J_{-\gamma} \right) \in L^p$$

であり, $T_{2^n} * J_{-\gamma}$ によって定理5 の主張のとおり近似される。

注意. 定理5 の仮定は $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n} E_n^{(p)}(f) < \infty$ としても同値である。

引用文献

[1] 村松寿延 一般の領域における Besov 空間. 数解研研究集会予稿および講究録 号 (1971)

[2] A. F. Timan, Theory of Approximation of Functions. Pergamon Press (1963)

[3] M. Kojima and C. Watari, unpublished.

[4] C. Watari, A Note on Saturation and Best Approximation, Tôhoku Math. J. 15 (1963) 273-276.

[5] A. Zygmund, Trigonometric series. Cambridge Univ. Press (1959)

[6], A. Zygmund. On a Theorem of Marcinkiewicz concerning Interpolation of Operations, Journal de Math. pures et appliquées 35 (1956) 223-248.