数理解析研究所講究録
第138巻 1972年 54-68

Martingale積分について

東北大理　風巻紀彦

本稿の前半で．local martingale の時間変更についての．いくつかの結果を．後半は weak martingale なる概念を導入し．その基本的性質を述べて．weak martingale に関する確率積分を考察する。

1.- 時間変更による変換

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間．$(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ を $\mathcal{F}$ の sub σ-fields の右連続単調増加な族とし，測度0の集合は $\mathcal{F}_0$ に属するものとする。この $(\mathcal{F}_t)$ に関する stopping times の class を $S\cdot T(\mathcal{F}_t)$ と書く。

定義 1．次の条件をみたす $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ を時間変更という．

(1)　各 τ_t が有限で．$S\cdot T(\mathcal{F}_t)$ に属する．

(2)　確率1で、sample path $t \longrightarrow \tau_t(\omega)$ が右連続．単調増加である。

特に，確率1で sample path $t \to \tau_t(\omega)$ が連続のとき．T は

連続。さらに、それが連続かつ狭義増加，$\tau_0(\omega)=0$，$\tau_\infty(\omega)=\infty$ なるとき，T は正規時間変更であるという。当然のことながら，他の $\mathcal{F}$ の sub σ-fields の族 $(\mathcal{G}_t)$ に対しての時間変更を定義することができる。$X=(X_t,\mathcal{F}_t)$ を process とするとき，確率 1 で，sample path $t\to X_t(\omega)$ が区間 $[0,\tau_0(\omega)]$ および $[\tau_{a-0}(\omega),\tau_a(\omega)]$，$a>0$，で constant ならば，時間変更 T は X-連続であるという。次に，2つの processes $X=(X_t,\mathcal{F}_t)$，$Y=(Y_t,\mathcal{F}_t)$ が一致するということを，確率 1 で sample paths $t\to X_t(\omega)$ $t\to Y_t(\omega)$ が等しい意味にとる。

補題 1. 任意の時間変更 $T=(\mathcal{F}_t,\tau_t)$ に対し，$(\mathcal{F}_{\tau_t})$ は右連続単調増加である。

補題 2. $T=(\mathcal{F}_t,\tau_t)$，$S=(\mathcal{F}_{\tau_t},s_t)$ を時間変更とするとき $ST=(\mathcal{F}_t,\tau_{s_t})$ も又時間変更である。

一様可積分な martingales 全体を $\mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$，$L^2$-有界 martingales 全体を $\mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t)$ と書くことにする。$(\mathcal{F}_t)$ を明記する必要のないときは単に $\mathcal{M}^1$，$\mathcal{M}^2$ と書く。

定義 2. 次の条件をみたす process $M=(M_t,\mathcal{F}_t)$ を，local martingale という：

$$\exists \underset{\substack{\cap \\ S.T(\mathcal{F}_t)}}{T_n} \uparrow \infty \quad \ni \quad \forall n=1,2,\cdots \qquad (M_{t\wedge T_n} I_{\{T_n>0\}},\mathcal{F}_t)_{0\le t<\infty} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$$

特に，$(M_{t\wedge T_n} I_{\{T_n>0\}})\in\mathcal{M}^2(\mathcal{F}_t)$ のとき，M は局所自乗可積分

な martingale という。 $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ あるいは $\mathcal{L}$ を local martingales の全体とする。

定理 1. $M \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$, $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ が M-連続時間変更なるとき, $TM = (M_{\tau_t}, \mathcal{F}_{\tau_t}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\tau_t})$ である。

証明. $N_t = M_{\tau_t}$ とおく。 定義から

$$S\cdot T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty \quad ; \quad (M_{t\wedge T_n} I_{\{T_n > 0\}}) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$$

いま, $J_n \equiv \inf\{u \geq 0 \ ; \ \tau_u \geq T_n\}$ とおくと, これは $S\cdot T(\mathcal{F}_{\tau_t})$ に属する。 $P\{J_n \uparrow \infty\} = 1$, $\{0 < J_n\} \subset \{0 < T_n\}$ であるから, 従って

$$\forall n, \quad (N_{t\wedge J_n} I_{\{0 < T_n\}})_{0 \leq t < \infty} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_{\tau_t})$$

なることを証明すればよい。

$D_n \equiv \tau_{J_n - 0}$, $E_n \equiv \tau_{J_n}$ とおくと, $t < J_n$ のとき

$$N_{t\wedge J_n} = M_{\tau_t \wedge T_n}$$

$t \geq J_n$ のとき

$$N_{t\wedge J_n} = M_{E_n} .$$

ところが, 仮定によって, T が M-連続であるから

$$M_{E_n} = M_{T_n} \quad (\forall \omega \in \{D_n \leq E_n\})$$

$$\text{i.e} \quad N_{t\wedge J_n} = M_{\tau_t \wedge T_n} \quad \text{a.s} \quad .$$

Doob's optional sampling theorem から

$$\forall n,\quad (M_{\tau_t \wedge T_n} I_{\{T_n > 0\}}) \in \mathcal{M}'(\mathcal{F}_{\tau_t}).$$

従って，定理が証明された。

$\mathcal{L}$ が時間変更に関して閉じていない点は注意を要する。

例 1. $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を条件：$P\{\overline{\lim_{t\to\infty}} M_t = \infty\} = 1$ をみたす連続な martingale とする。たとえば，1 次元 Brown 運動はこの条件をみたす。いま，$\tau_t = \inf\{u \geqq 0 \,;\, M_u \geqq t\}$ とおくと，$T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ は，$M_{\tau_t} = t$ a.s をみたす時間変更であって，明らかに，process $(t, \mathcal{F}_{\tau_t})$ は，$\mathcal{L}$ に属さない。

以下，local martingale M に，$M_0 = 0$ を仮定する。

定理 2. $\forall M \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ $\exists\, S = (\mathcal{F}_t, S_t)$ 連続な時間変更

$\ni$ (1) $S_0 = 0$, $S_\infty = \infty$ a.s

(2) SM : martingale

証明．一般性を失うことなく $T_0 = 0$，各 T_n は有限であると仮定できる。このとき，$S_t^n = T_{n-1} \vee (T_n \wedge t)$，とおくと $S_0^n = T_{n-1}$, $S_\infty^n = T_n$ で，$S^n = (\mathcal{F}_t, S_t^n)$ は連続な時間変更をなす。$\varphi_n : [n-1, n] \longrightarrow [0, \infty]$ を単調増加な bijection とす

るとき

$$S^n_{\varphi_n(n-1)} = S^n_0 = T_{n-1} = S^{n-1}_\infty = S^{n-1}_{\varphi_{n-1}(n-1)}$$

となるから，　$s_t = S^n_{\varphi_n(t)}$ if $n-1 \leq t < n$ が定義できて，

$$s_0 = S^1_{\varphi_1(0)} = S^1_0 = T_0 = 0$$

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} S^n_{\varphi_n(n)} = \lim_{n\to\infty} S^n_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \infty$$

従って，$\mathcal{S} = (\mathcal{F}_t, s_t)$ は，条件 (1) をみたす連続な時間変更である。　$\forall n$, $s_n = T_n$ なることに注意して，Doob's optional sampling theorem を用いると $(M_{s_t}, \mathcal{F}_{s_t})$ が martingale であることがわかる。

注意．$\mathcal{S}$ が正規にとれるか否かは，これまでのところ不明である。

定理 3．$(\mathcal{F}_t)$ が擬左側連続のとき，任意の局所自乗可積分 martingale $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ に対し，正規時間変更 $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ がとれて，$TM = (M_{\tau_t}, \mathcal{F}_{\tau_t})$ が自乗可積分な martingale となる。

証明．　Meyer の定理から，単調増加で連続な process (A_t)

が存在して，$(M_t^2 - A_t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$．　いま．$\lambda_t = t + A_t$，

$\theta_t = \inf\{u \geq 0 ; \lambda_u > t\}$　とおくと，$Ⓗ = (\mathcal{F}_t, \theta_t)$，$\Lambda = (\mathcal{F}_{\theta_t}, \lambda_t)$

がいずれも正規時間変更をなす。　$\lambda_{\theta_t} = t$　から，$\theta_t \leq t$，

$A_{\theta_t} \leq t$，又．Doob's optional sampling theorem から．

$$(M_{\theta_t}^2 - A_{\theta_t}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\theta_t}).$$

従って．

$$\exists \beta_n \uparrow \infty,\ \beta_n \in S.T(\mathcal{F}_{\theta_t})\ ;\ (M^2_{\theta_{t\wedge\beta_n}} - A_{\theta_{t\wedge\beta_n}})_{0 \leq t < \infty} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_{\theta_t})$$

従って，$E[M^2_{\theta_{t\wedge\beta_n}}] = E[A_{\theta_{t\wedge\beta_n}}] \leq t$．すなわち．$\{M_{\theta_{t\wedge\beta_n}}\}_{n=1,2,\cdots}$

は一様可積分となる。　ゆえに　ⒽM は martingale である。

さらに．Fatou's lemma によって，$M_{\theta_t} \in L^2$　$\forall t \geq 0$．従って

ⒽM は自乗可積分な martingale である。　なお $M = \Lambda(ⒽM)$

が成立する。

2.- Weak martingales

定義3．次の条件をみたす process $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を．weak martingale という：

$$S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty \quad \exists M^n = (M_t^n, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}^1,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$;\quad M_t = M_t^n \ \text{ if } \ t < T_n$$

local martingale は．weak martingale である。　然し．こ

の逆は一般に成立しない。たとえば，有界かつ連続な weak martingale でも必ずしも martingale にならない。

例 2.　$X=(X_t)$，$X_0=0$，を a Poisson process of parameter λ，X_s，$s\leq t$，から生成される σ-field を $\mathcal{F}_t$，S を X の first jump time とするとき，$P\{S>t\}=e^{-\lambda t}$ となる。簡単な計算から

$$E[S-\tfrac{1}{\lambda}\mid\mathcal{F}_t]=\begin{cases} t & \text{if } t<S \\ S-\frac{1}{\lambda} & \text{if } t\geqq S \end{cases}$$

を得る。そこでいま，適当な確率空間上で，互に独立な Poisson processes $X^n=(X^n_t)$，$X^n_0=0$，of parameter n^{-3}，$n=1,2,\cdots$ を考えよう。$\mathcal{F}_t$ は $\{X^n_s, s\leq t, n=1,2,\cdots\}$ から生成された σ-field とする。Borel-Cantelli's lemma を用いると，X^n の first jump time S_n は，$n\to\infty$ のとき $+\infty$ に概収束することがわかる。従って，各 n に対し，$t<S_n$ のとき

$$E[S_n-n^{-3}\mid\mathcal{F}_t]=t$$

が成立することに注意すると，process $(t,\mathcal{F}_t)$ が weak martingale なることがわかる。この process は，local martingale でない。

定理 4.　$M=(M_t,\mathcal{F}_t)$ が weak martingale のとき，任意の時間変更 $T=(\mathcal{F}_t,\tau_t)$ に対し，TM が又 weak martingale となる。

証明．定義によって

$$S\cdot T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty \ , \ \exists (M_t^n) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t) \quad ; \quad M_t = M_t^n \text{ if } t < T_n$$

いま．$S_n \equiv \inf\{u \geq 0 \ ; \ \tau_u \geq T_n\}$ とおくと．$S_n \in S\cdot T(\mathcal{F}_{\tau_t})$ で．

$$S_n \uparrow \infty \ , \quad \{t < S_n\} \subset \{\tau_t < T_n\}$$

をみたす。Doob's optional sampling theorem から

$$\forall n, \quad (M_{\tau_t}^n) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_{\tau_t})$$

さらに．$M_{\tau_t} = M_{\tau_t}^n$ if $t < S_n$ 。従って，TM は weak martingale である。

定理 5．Process $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ が．次の条件をみたすとき．weak martingale となる：

$$S\cdot T(\mathcal{F}_t) \ni \exists R_n \uparrow \infty \ , \ \exists (M_t^n, \mathcal{F}_t) \text{ weak martingales}$$
$$; \quad M_t = M_t^n \text{ if } t < R_n$$

証明．各 M_t^n が weak martingale であるから

$$S\cdot T(\mathcal{F}_t) \ni \exists R_n' \ , \ \exists (\hat{M}_t^n, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}^1$$
$$; \quad M_t^n = \hat{M}_t^n \text{ if } t < R_n' \ , \ P\{R_n' < R_n\} < 1/2^n \ .$$

Borel-Cantelli's lemma によって．$R_n' \uparrow \infty$ と仮定できる。

$T_n \equiv R_n \wedge R_n'$ は．$S\cdot T(\mathcal{F}_t)$ に属し

$$T_n \uparrow \infty , \quad M_t = \hat{M}_t^n \text{ if } t < T_n$$

をみたす。従って，M は weak martingale である。

注意。確率空間によっては、weak martingale と martingale が一致することがある。次に、その重要な例を示す。

$\Omega \equiv \mathbb{R}_+$, Ω の linear Borel sets から成る σ-field を $\mathcal{F}^0$, S を identity mapping $\omega \longrightarrow S(\omega) \in \mathbb{R}_+$ とし、さらに $\mathcal{F}_t^0$ を $S \wedge t$ によって生成される σ-field とする。簡単の為、Ω 上の確率測度を、$\mathbb{P}\{S > t\} = e^{-t}, t \geq 0$ によって定める。$\mathcal{F}^0, \mathcal{F}_t^0$ の $\mathbb{P}$-completion を $\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$ と書く。

そこで、いま $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を任意の weak martingale とする。

. i.e $S\cdot T(\mathcal{F}_t) \ni {}^\exists T_n \uparrow \infty$ $\ \exists (M_t^n) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$; $M_t = M_t^n$ if $t < T_n$

各 T_n は有界と仮定できる。このとき

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \ni \exists\, s_n \uparrow \infty \quad ; \quad \begin{cases} \text{(i)} & T_n \geq S \quad \text{a.s. if } S \leq s_n \\ \text{(ii)} & T_n = s_n \quad \text{a.s. if } S > s_n \end{cases}$$

が成立する。 $s \leq t$ のとき

$$M_s^n = E[M_t^n \mid \mathcal{F}_s] = M_t^n I_{\{S \leq s\}} + E[M_t^n \mid \mathcal{F}_s] I_{\{S > s\}}$$

従って、$M_t^n = M_s^n$ if $S \leq s$ から

$$\forall n, \forall t, \ M_t^n = M_{t \wedge S}^n \quad \text{a.s}$$

ところで、M_t^n, M_t は、$\{S > t\}$ 上で constant C_t^n, C_t をとるから、

$$M_t^n = M_S^n I_{\{S \leq t\}} + C_t^n I_{\{S > t\}}$$

$$M_t = M_S I_{\{S \leq t\}} + C_t I_{\{S > t\}}$$

と書ける。 $t < s_n$ のとき、$\{s_n < S\} \subset \{t < S\}$ 従って $\{s_n < S\}$ 上で、$M_t = M_t^n$、すなわち、$M_t^n = M_S^n I_{\{S \leq t\}} + C_t I_{\{S > t\}}$ となる。

ゆえに，$s \leq t < s_n$ のとき

$$\int_{]s,\infty[} M_t^n \, dP = \int_{]s,\infty[} M_s^n \, dP = C_s e^{-s}$$

これより．$\int_{]s,t]} M_S^n \, dP = C_s e^{-s} - C_t e^{-t}$ ，$(s \leq t < s_n)$ が成立する。

従って，$M_S^n I_{[0,s_n]} = M_S^{n+k} I_{[0,s_n]}$ が示されるから．$t < s_n$ のとき．$M_S I_{\{S \leq t\}} = M_S^n I_{\{S \leq t\}}$ となる。　従って，$t < s_n$ のとき．$M_t = M_t^n$ ，$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ ，に注目すると，M が良は martingale なることがわかる。

なお．任意の t に対し，mapping $\omega \longrightarrow M_t(\omega)$ が左側連続のとき，

$$M_S(\omega) = -\lim_{h\downarrow 0} \frac{C_\omega - C_{\omega-h} e^h}{h} \quad , \quad \omega > 0$$

となる。

この公式は，(C_t) があたえられて，martingale を作る際に便利である。

3.- Weak martingale に関する確率積分

定義 4．次の条件をみたす process $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$ を locally bounded predictable process という：

$$S \cdot T(\mathcal{F}_t) \ni {}^{\exists} S_n \uparrow \infty \quad ; \quad (\forall n) \, , \, (H_{t\wedge S_n} I_{\{S_n > 0\}}, \mathcal{F}_t) \text{ bounded predictable process}$$

この processes の全体を $\mathcal{P}$ で示す．

たとえば．左側連続な process は，$\mathcal{P}$ に属する。

確率1で sample path が右連続単調増加かつ原点 $t=0$ で 0 となる process の全体を $\mathcal{V}^+$ とし，$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^+$ とおく。

定義5．Process $X=(X_t, \mathcal{F}_t)$ が，$X_t = X_0 + M_t + A_t$；$(M_t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$，$(A_t) \in \mathcal{V}$ と書けるとき，semi-martingale という．

Doléans-Mayer [1] に従い，任意の $H \in \mathcal{P}$ に対し，semi-martingale X に関する確率積分 $H \circ X$ を

$$(H \circ X)_t = H_0 X_0 + (H \circ M)_t + (H \circ A)_t$$

と定義する。こゝで，$H \circ M$ は local martingale M に関する確率積分，$H \circ A$ は各 ω を fix したときの Stieltjes 積分で定義されたものである。

以下，$M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を weak martingale，T_n，M_t^n を定義3の条件をみたす stopping time，一様可積分な martingale とする。

補題3．任意の n に対し，$M^{T_n} \equiv (M_{t \wedge T_n}, \mathcal{F}_t)$ は，semi-martingale である。

証明．一般性を失うことなく

$$\forall n, \quad M_t^n = M_{t \wedge T_n}^n$$

をみたすことを仮定できる。いま，$\overset{+}{M}{}_t^n \equiv E[(M_{T_n}^n)^+ \mid \mathcal{F}_t]$，

$\bar{H}^n_t \equiv E[(M^n_{T_n})^- \mid \mathcal{F}_t]$ とおくと，$\overset{+}{H}{}^n, \bar{H}^n$ いずれも $\mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$ に属する。従って，$\overset{+}{Y}{}^n_t \equiv \overset{+}{H}{}^n_t I_{\{t<T_n\}}$，$\bar{Y}^n_t \equiv \bar{H}^n_t I_{\{t<T_n\}}$ は，class (D) に属する potential をなす。 Meyer の Doob 分解定理を用いると

$\overset{+}{Y}{}^n_t = \overset{+}{U}{}^n_t - \overset{+}{V}{}^n_t$，$\bar{Y}^n_t = \bar{U}^n_t - \bar{V}^n_t$ ；$\overset{+}{U}{}^n, \bar{U}^n \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$，$\overset{+}{V}{}^n, \bar{V}^n \in \mathcal{V}^+$

と分解される。 $U^n_t \equiv \overset{+}{U}{}^n_t - \bar{U}^n_t$，$V^n_t \equiv \overset{+}{V}{}^n_t - \bar{V}^n_t$ とおくと，U^n は $\mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$ に，V^n は $\mathcal{V}$ に属する。 $M_t = U^n_t + V^n_t$ if $t<T_n$ から

$$M^{T_n}_t = M_{t\wedge T_n} = U^n_t + V^n_t + M_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}$$

process $(V^n_t + M_{T_n} I_{\{T_n\leq t\}}, \mathcal{F}_t)$ は $\mathcal{V}$ に属する。従って，M^{T_n} は，semi-martingale である。

なお，$M^n_t = U^n_t + V^n_t + M^n_{T_n} I_{\{T_n\leq t\}}$ となる。 補題3の証明中の記号は以後続けて用いることにする。

定理6．

$$\left.\begin{array}{l}\forall M = (M_t, \mathcal{F}_t) \text{ weak martingale} \\ \forall H = (H_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{P}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\exists^1 (H\circ M) = ((H\circ M)_t, \mathcal{F}_t) \\ \quad\text{weak martingale} \\ \qquad \ni (H\circ M)_t = (H\circ M^{T_n})_t \\ \qquad\qquad \text{if } t \leq T_n .\end{array}$$

証明． $H\in\mathcal{P}$ に対し，定義4の条件をみたす S_n は T_n に等しい，と仮定できる。 補題3によって，M^{T_n} が semi-martingale

であるから.

$$(H\circ M^{T_n})_t = (H\circ U^n)_t + (H\circ V^n)_t + H_{T_n}M_{T_n}I_{\{T_n\le t\}}$$

従って, $(H\circ M^{T_n})_{t\wedge T_n} = (H\circ M^{T_{n+1}})_{t\wedge T_n}$ の成立がわかる。故に

$$(H\circ M)_t \equiv \lim_{n\to\infty}(H\circ M^{T_n})_t$$

が定義できて, 明らかに, $t\le T_n$ のとき $(H\circ M)_t = (H\circ M^{T_n})_t$ をみたす。次に, $(H\circ M^n)_t = (H\circ U^n)_t + (H\circ V^n)_t + H_{T_n}M^n_{T_n}I_{\{T_n\le t\}}$ となり, これは local martingale で

$$(H\circ M)_t = (H\circ M^n)_t \quad \text{on } t<T_n$$

が成立する。従って, 定理5から $(H\circ M)$ は weak martingale である。一意性は, $(H\circ M^{T_n})$ の一意性より明らかである。

この process $(H\circ M)$ を, H の weak martingale M に関する確率積分と定義する。

ところで, martingale U^n の直交分解における連続な部分を $(U^n)^c$ と書くと, これは M^{T_n} の分解に独立に定まる。各 n に対し, $M^{T_{n+1}}_{t\wedge T_n} = M^{T_n}_t$ なることに注意すると, $(U^n)^c_{t\wedge T_n} = (U^{n+1})^c_{t\wedge T_n}$ を得る。従って, $M^c_t \equiv \lim_{n\to\infty}(U^n)^c_t$ が定義できて,

$$M^c_{t\wedge T_n} = (U^n)^c_t$$

をみたす。換言すると, M^c は連続な local martingale。そこで, $[M,M]_t \equiv \langle M^c,M^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2$ とおくと, 特に M が

local martingale のときは、Meyer の定義によるものに一致する。 $M^c_{t\wedge T_n} = (M^n)^c_t$ なることに注目すると

$$[M,M]_{t\wedge T_n} = \langle (M^n)^c, (M^n)^c \rangle_t + \sum_{s\leq t\wedge T_n} (\Delta M_s)^2$$

他方各 n に対し

$$[M^n,M^n]_t = \langle (M^n)^c, (M^n)^c \rangle_t + \sum_{s\leq t} (\Delta M^n_s)^2$$

従って、 $t < T_n$ のとき $[M,M]_t = [M^n,M^n]_t$ が成立する。 故に、 M, N が weak martingales のとき

$$[M,N] = \frac{1}{2}\left([M+N, M+N] - [M,M] - [N,N]\right)$$

とおくと、 $MN - [M,N]$ が又 weak martingale となる。さらに、

$$[H\circ M, N]_t = \int_0^t H_u\, d[M,N]_u$$

の成立も容易に示される。 然しながら、local martingale の場合のように $[M,M] = 0$ でも $M = 0$ とは限らない。たとえば、例1,2がそれである。 この為、weak martingale に関する確率積分を、[,] を用いて characterize できない。

以上

参考文献

[1] C.D. Dade and P.A. Meyer, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, vol. 124

Springer, Heidelberg 1970

[2] N. Kazamaki, Some properties of martingale integrals, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. VII, n°1, 1971, p 9 – 19

[3] N. Kazamaki, Changes of time, Stochastic integrals and weak martingales, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie (to appear).