数理解析研究所講究録
第140巻 1972年 29-49

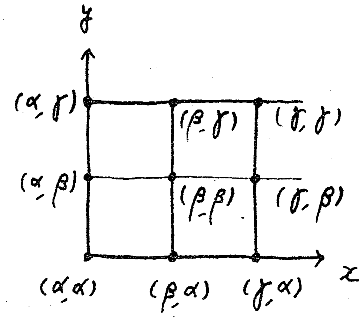
ある無限多値論理とパターンの特徴づけについて

中　村　昭（広大工学部）

§0　まえがき

最近 cellular automata とか tesselation automata 等によって，パターンの生成その特徴づけなど興味ある topics が研究されている。よく知られている様に，これらの automata は（少し大まかにいって）個々の automaton のある space での無限個の配列を与え，それらを global に考えたものに他ならない。

ところで，第一階の述語論理における論理式の universal validity（又は satisfiability）は $\{0,1\}$（但し 0 は偽，1 は真を示す）のみの space における配列の方法が，ある条件を満足する様にとれるかどうかという問題と考えられる。例えば，x, y を individual variables として，論理式 $F(x,y)$ の $D=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ における truth-value のすべてのとり方は、次の様な各点における truth-value に対応する。



この場合、上の配列を global に考えて、それらを truth-value とすれば、ある種の多値論理が構成される。述語論理式の universal validity は、Löwenheim-Skolem の定理によって可算無限個の domain を考えればよいから、上の様な配列全体(パターン)を一つの truth-value とした時、ある無限多値論理が、述語論理に対応して構成されることになる。(この様な無限多値論理について undecidability が、[1] で示されたが、われわれはここでもこの種の論理系から出発する。)

(注) 述語論理の decision problem をパターン認識との関係から考え、いくつかの unsolvability に関して、組合せ数学として面白い Domino ゲームの問題が [2]、[3]、[4] で H. Wang 等によって示されている。Domino ゲームとは、次の問題をいう。いま、大きさが同じで各辺に色がついている有限種類の正方形を考える。そしてこれらの正方形は無限個あるとして、それらを使って第一象限の全平面が埋めこまれるかどうかとい

う問題を考える。ただし正方形を回転したり裏返ししたりしないで、辺の色は隣の正方形の辺の色と同じとする。この問題の recursive unsolvability が、Turing Machine の halting problem を使って証明され、述語論理のある type の wff の決定不能問題との関係が[2][3][4]でくわしくのべてある。

さて、この報告の目的は、上でのべた様な意味でのある space での $\{0,1\}$ の配列を global に考え、そのパターンを truth-value と考えた無限多値論理系を定義し、その decision problem とか complete な公理系（特徴づけ）等を論ずる事である。（この様な抽象的な話が実際の工学的問題に果してどの様な役割を演ずるかわからないのだが——。）

§1 Truth-value と truth-value function

いま、Nを自然数として $\Omega=\{0,1\}$ とする。このとき、次の mapping を考える。

$$f : N \to \Omega$$

$$g : N \times N \times N \to \Omega^N$$

上の g を truth-value と定義する。勿論 これは無限多値

である。いま $N\times N\times N\ni(x,y,z)$ をとり、これを座標といい、x, y, z をそれぞれ x 座標、y 座標、z 座標という。次に logical operations として、X、Y、Z、$\exists_x$、$\exists_y$、$\exists_z$、$\exists_t$、$\neg$ 及び $\vee$ をとる。そしてこれらの truth-value functions を次の様に定義する。

いま、$f(\lambda)=*_\lambda$ とし $g(x,y,z)=v_{xyz}$ と表わす。ただし明らかに $*_\lambda\in\Omega$、$v_{xyz}\in\Omega^N$。このとき、

X : wff $\mathfrak{A}$ が、$N\times N\times N\ni(i,i,i)$ で値 v_{iii} をとれば、$X\mathfrak{A}$ はあらゆる (i,y,z) $(y,z=1,2,3\cdots\ \ )$ で v_{iii} をとる。

Y、Z : X と同じ様にして定義される。

$\vee$、$\neg$: Truth-value の成分である $0, 1$ に関して普通の方法で定義される。

$\exists_x$: y、z を固定して、$N\times N\times N\ni(x,y,z)$ を考え、wff $\mathfrak{A}$ が (a,y,z) での値の中で $*_\lambda$ が 1 である様な a があれば、$\exists_x\mathfrak{A}$ はあらゆる (x,y,z) $(x=1,2,3\cdots)$ の値の中の $*_\lambda$ は 1 である。

$\exists_y$, $\exists_z$: $\exists_x$ と同じ様にして定義される。

$\exists_t$: あらゆる $g(x,y,z)$ に対して

$$\exists_t\, g(x,y,z)=\begin{cases}\text{すべての } *_\lambda\ (\lambda=1,2,3\cdots)\text{ は }1\\ \quad(\text{ある }\lambda\text{ に対して }*_\lambda=1\text{ のとき})\\ \text{すべての }*_\lambda\ (\lambda=1,2,3\cdots)\text{ は }0\\ \quad(\text{すべての }\lambda\text{ に対して }*_\lambda=0\text{ のとき})\end{cases}$$

上で考えたtruth-valueのうちで、あらゆる(x, y, z)のすべての$*_\lambda$ $(\lambda=1, 2, 3\cdots)$が1であるものをdesignated valueという。そして wff $\mathfrak{A}$が、その中にあらわれるpropositional variables $P_1, P_2, \cdots, P_n$のtruth-valueのとり方いかんにかかわらず、つねにdesignated valueをとるとき、$\mathfrak{A}$はvalidであるという。

§2 Decision Problem

§1でのべたinfinitely many-valued logic L_1をとり、その論理系でのwff $\mathfrak{A}$がvalidであるかどうか判定する決定問題について考える。

(注) Nの代わりに自然数の有限集合Mをとり、

$$f : M \to \Omega$$

$$g : M \times M \times M \to \Omega^M$$

である様なgをtruth-valueとすれば、これは有限多値論理になって、決定問題は無意味になる。Dominoの問題も有限部分を埋めつくすかどうかとしては、無意味になる。

この決定問題をしらべるために、上で定義した論理系L_1と、第一階の述語論理との関係をのべておく。さて、Surányi Reduction Theoremによれば、次の性質が成立する。

定理　述語論理の wff $\mathfrak{A}$ に対して、次の形の wff $\mathfrak{B}$ をつくる事ができる。

(I)　$(\exists x)(\exists y)(\exists z)M_1 \vee (\exists x)(\exists y)(z)M_2$

ただし、M_1、M_2 は quantifier-free であって、monadic と duadic predicates だけを含む。更に、$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は universal validity に関して等値である。

以下、述語論理の任意の wff $\mathfrak{A}$ に対して、(I) の形の wff を $\mathfrak{A}^*$ で表わす事にする。いま述語論理 K の wff $\mathfrak{A}^*$ とそのあらゆる subformula γ に対して、$h(\gamma)$ を次で定義される L の wff とする。

(i)　γ が monadic predicate $F(x)$[1] ならば

$$h(F(x)) = (\exists_t)\, X F.$$

(ii)　γ が duadic predicate $G(x, y)$[1] ならば

$$h(G(x, y)) = (\exists_t)(XG^1 \wedge YG^2).$$

(iii)　γ が logical operation 又は quantifier を含むときは、

$$h(\neg\gamma_1) = \neg h(\gamma_1)$$

$$h(\gamma_1 \vee \gamma_2) = h(\gamma_1) \vee h(\gamma_2)$$

$$h((\exists x)\gamma_1) = \exists_x h(\gamma_1)$$

$$h((\exists y)\gamma_1) = \exists_y h(\gamma_1)$$

---

1) $F(y)$、$G(y, z)$ 等も同様である。

$$h((\exists z)\gamma_1) = \exists_z h(\gamma_1)$$

例えば、$h((\exists x)(\exists y)(\exists z)(F(x) \& G(x,z)))$

$$= \exists_x \exists_y \exists_z (\exists_t X F \wedge \exists_t (X G^1 \wedge Z G^2)).$$

以後、われわれは $h(\mathfrak{A}^*)$ を $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ と表わす。$\tilde{\mathfrak{A}}^*$ は、L の wff である。

このとき、次の定理が成立する。

定理1　$\tilde{\mathfrak{A}}^*$ が L で valid ならば、$\mathfrak{A}^*$ は K で universally valid である。

定理2　$\mathfrak{A}^*$ が K で universally valid ならば、$\tilde{\mathfrak{A}}^*$ は L で valid である。

この定理1,2の証明は、§3でする事にして、上の定理からLの決定問題は unsolvable である事がわかる。なぜならば、いまLの decision problem が recursively solvable であるとする。(たがって、Lにおける任意の wff $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ が valid であるかどうか決定する effective procedure がある。このとき定理1,2から K における wff $\mathfrak{A}^*$ が universally valid かどうか判定する effective procedure を持つ事になり、述語論理の決定問題が recursively solvable になる。これは矛盾である。

§3 定理1, 2の証明

ここで, 定理1に equivalent な定理1′を証明する。

定理1′ $\mathfrak{A}^*$ がKで universally valid でなければ, $\mathfrak{A}^*$ はL_1で valid でない。

(証明)

Löwenheim-Skolem の定理によれば, Kにおける wff $\mathfrak{F}$ は, それがある enumerable infinite domain ω において valid であれば, 一般に universally valid である。したがって, 定理の仮定から $\mathfrak{A}^*$ は適当な truth-value assignment によって ω で $\mathbb{F}$ (falsity) となる。いま, ω の元を $e_1, e_2, e_3, \ldots$ として, $\mathfrak{A}^*$ に現われる述語を

$$(\mathrm{II})\quad \begin{array}{l} F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\alpha(x), \ldots; F_1(z), F_2(z), \ldots, F_\alpha(z) \\ G_1(x, x), \ldots, G_\beta(x, x), \ldots; G_1(z, z), \ldots, G_\beta(z, z) \end{array}$$

とする。[1]

さて, $\mathfrak{A}^*$ を ω で $\mathbb{F}$ ならしめる述語(II)の truth-value assignment を考える。それをいま次であったとする。

$$(\mathrm{III})\quad \begin{array}{llll} F_1(e_1): \mathbb{T} & F_2(e_1): \mathbb{F} & \cdots & F_\alpha(e_1): \mathbb{T} \\ F_1(e_2): \mathbb{T} & F_2(e_2): \mathbb{T} & & F_\alpha(e_2): \mathbb{F} \\ & \vdots & & \\ G_1(e_1, e_1): \mathbb{T} & G_1(e_2, e_1): \mathbb{F} & \cdots & \end{array}$$

---

[1] これらの述語は実際に $\mathfrak{A}^*$ の中にあらわれるとしてよい。なぜならば もし $F_1(x)$ が M_1 にも M_2 にもあらわれなければ $(\exists x)(\exists y)(\exists z)M_1$ に equivalent な $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(M_1 \,\&\, F_1(x) \vee \neg F_1(x))$ を考えればよい。

$G_1(e_1, e_2): \mathbb{T}$ $\quad G_1(e_2, e_2): \mathbb{T}$

$\vdots$

$G_\beta(e_1, e_1): \mathbb{T}$ $\quad G_\beta(e_2, e_1): \mathbb{F}$ $\quad \cdots$

$G_\beta(e_1, e_2): \mathbb{F}$ $\quad G_\beta(e_2, e_2): \mathbb{T}$

$\vdots$

この truth-value assignment から，われわれは L における次の様な truth-value assignment を考える。まず，K における $\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$ に L のすべての λ に対して $f(\lambda)=1$ である f（以下 f' と記す。）とすべての λ に対して $f(\lambda)=0$ である f（以下 f° と記す。）を対応させる。そして，$e_1, e_2 \cdots\cdots$ に $N\times N\times N$ の $(1,1,1)$，$(2,2,2)$ $\cdots\cdots$ をそれぞれ対応させる。

さて，$\tilde{\mathfrak{A}}^*$ における $F_1, F_2 \cdots, F_\alpha$ には次の truth-value を与える。即ちもし（III）で $F_i(e_j)$ が $\mathbb{T}$（又は $\mathbb{F}$）ならば F_i は (j,j,j) で f'（又は f°）をとる。この場合 F_i の v_{111}，$v_{222} \cdots$ 以外の v_{xyz} は任意でよい。この事は，明らかに何時も可能である。

次に $\mathfrak{A}^*$ の $G_1, G_2, \cdots, G_\beta$ に対応する $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ の $G_1^1, G_2^1, \cdots G_\beta^1$；$G_1^2, G_2^2, \cdots, G_\beta^2$ について考える。もし $G_i(e_1, e_1)$ が (III) で $\mathbb{T}$ ならば，われわれは G_i^1 は $(1,1,1)$ で $(\tau_1, \tau_2, \tau_3 \cdots)$ をとり，G_i^2 は $(1,1,1)$ で $(\tau_1', \tau_2', \tau_3', \cdots)$ をとり，それ

によって $\exists_t (G_i^1 \wedge G_i^2)$ が f' である様に、$\tau_i, \tau_i' (\in \Omega)$ を与える。又 $G_i(e_1, e_2)$ が(III)で $\mathbb{T}$ ならば、G_i^1 は(1,1,1)で上の $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots)$ をとり、G_i^2 は(2,2,2)で $(\tau_1'', \tau_2'', \tau_3'', \cdots)$ をとり、それによって $\exists_t (G_i^1 \wedge G_i^2)$ が f' をとる様に $\tau_i, \tau_i'' (\in \Omega)$ を与える。そしてこの事をつづけて行く。この場合もし $G_i(e_k, e_l)$ が(III)で $\mathbb{F}$ をとれば、(k,k,k)における G_i^1 の値 $(\tau_1^{(\sigma)}, \tau_2^{(\sigma)}, \cdots)$ と(l,l,l)における G_i^2 の値 $(\tau_1^{(\rho)}, \tau_2^{(\rho)}, \cdots)$ で $\exists_t (G_i^1 \wedge G_i^2)$ は f' をとらない様にする。この様な値を N×N×N のすべての(1,1,1),(2,2,2)… に対して $G_1^1, G_2^1, \cdots, G_\beta^1 ; G_1^2, \cdots, G_\beta^2$ に~~対して~~与える。ただし上の座標以外の点に対しては任意でよい。この事は、f は $(*_1, *_2, \cdots)$ の如く 0, 1 の無限系列であるから何時も可能である。

例えば G_i が次の様な truth-value assignment であったとする。

1)

① $G_i(e_1, e_1)$: $\mathbb{T}$	② $G_i(e_2, e_1)$: $\mathbb{F}$	④ $G_i(e_3, e_1)$: $\mathbb{F}$
③ $G_i(e_1, e_2)$: $\mathbb{T}$	⑤ $G_i(e_2, e_2)$: $\mathbb{T}$	⑧ $G_i(e_3, e_2)$: $\mathbb{T}$
⑥ $G_i(e_1, e_3)$: $\mathbb{F}$	⑨ $G_i(e_2, e_3)$: $\mathbb{T}$	$G_i(e_3, e_3)$: $\mathbb{F}$

ここで、①、②、③…は ↙ にしたがって、これらをかぞえたときの番号を示す。

この1)に対しては、次の2)を考えればよい。

2) $G_i^1(e_1):(1,0,1,*_4,*_5,\cdots)$ $\quad G_i^2(e_1):(1,0,0,\cdots\cdots)$

$G_i^1(e_2):(0,0,0,0,1,\cdots)$ $\quad G_i^2(e_2):(0,0,1,0,1,0,0,1,\cdots)$

$G_i^1(e_3):(0,0,0,0,0,0,0,1,\cdots)$ $\quad G_i^2(e_3):(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1\cdots)$

$\vdots$

ここで、$G_i^j(e_k)$ $(j=1,2)$ は G_i^j の (k,k,k) における値を意味する。又1)において T をとる番号①、③……に対応して、それぞれの値が①番目、③番目で 1 となっている。

さて、enumerable infinite domain N においては、$(\exists x)$、$(\exists y)$、$(\exists z)$ は x-座標、y-座標、z-座標における infinite disjunction と解釈される。例えば $(\exists x)\mathfrak{A}(x,y,z)$ は $\mathfrak{A}(1,y,z)\vee\mathfrak{A}(2,y,z)\vee\cdots\cdots$。そして又もし $F(e_1,e_2)$ が述語 $F(x,y)$ の一つの truth-value であれば、それは $N\times N\times N$ の $(1,2,z)$ の value を表わす事が、X, Y, Z の定義からわかる。($F(e_1,e_2)$ が $F(y,x)$ の truth-value であれば、それは $(2,1,z)$ での値になる。)

したがって、上で与えた truth-value assignment と $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ のつくり方と、更に N における quantifier の解釈から、われわれは $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ は L_1 で valid でない事が

わかる。　　　　　Q.E.D.

次に、定理2にequivalentな定理2′を証明する。

定理2′　$\tilde{\mathfrak{A}}^*$がLでvalidでなければ、$\mathfrak{A}^*$はLでuniversally validでない。

(証明)

まず、$\tilde{\mathfrak{A}}^*$の形は、$\exists_x \exists_y \exists_z \tilde{M}_1^* \vee \exists_x \exists_y \neg \exists_z \neg \tilde{M}_2^*$である事に注意する。ただし$\tilde{M}_1^*$、$\tilde{M}_2^*$は、それぞれ$h(M_1)$、$h(M_2)$を表わす。したがって、定理の仮定から$\tilde{\mathfrak{A}}^*$におけるpropositional variables $F_1, F_2, \cdots, F_\alpha$; $G_1^1, \cdots, G_\beta^1$; $G_1^2, G_2^2, \cdots, G_\beta^2$に適当な値を与えれば、$\tilde{\mathfrak{A}}^*$はあらゆる$(x, y, z) \in N \times N \times N$において$f^0$をとる様にする事ができる。

さて、f^0, f^1に$\mathbb{F}, \mathbb{T}$を対応させてやる。そして、$N \times N \times N \ni (i, i, i)$における値のみを考える。$(i = 1, 2, 3, \cdots)$

いま、仮定を満足するtruth-value assignmentが次の様であるとする。

$F_1(e_1) : (t_{111}, t_{112}, \cdots)$　　$F_2(e_1) : (t_{211}, t_{212}, \cdots)$　$\cdots$

$F_1(e_2) : (t_{121}, t_{122}, \cdots)$　　$F_2(e_2) : (t_{221}, t_{222}, \cdots)$

$\vdots$

$G_1^1(e_1) : (\tau_{111}^1, \tau_{112}^1, \cdots)$　　$G_1^2(e_1) : (\tau_{111}^2, \tau_{112}^2, \cdots)$

$G_1^1(e_2) : (\tau_{121}^1, \tau_{122}^1, \cdots)$　　$G_1^2(e_2) : (\tau_{121}^2, \tau_{122}^2, \cdots)$

$\vdots$

ただし、$F_1(e_1)$, $F_1(e_2)$, … は (1,1,1), (2,2,2), … における F_1 の値を表わす。

このとき、individual domain ω として (1,1,1), (2,2,2), … をとる。そして述語 $F_j(x)$ の $x=(i,i,i)$ における truth-value として、上の $F_j(e_i)$ から得られる $\exists_t X F_i$ を与える。又述語 $G_j(x,y)$ の $x=(k,k,k)$, $y=(l,l,l)$ での truth-value として、上の $G_j^1(e_k)$, $G_j^2(e_l)$ から得られる $\exists_t(XG_j^1 \wedge YG_j^2)$ を与える。他についても同様にする。このとき、X, Y, Z の定義と $h(F_j(x)) = \exists_t X F_j$, $h(G_j(x,y)) = \exists_t(XG_j^1 \wedge YG_j^2)$, … から $\mathfrak{A}^*$ は enumerable infinite domain ω で f^0 をとる。即ち $\mathfrak{A}^*$ は $\mathbb{F}$ をとる事がわかる。よって定理2' をうる。

Q.E.D.

§4 Truth-value の拡張

さて、無限多値命題論理 L の undecidability が前節で示されたが、これを特徴づける事を次に考えよう。特徴づけとして、ここではその generation rule を与える事と解釈しておく。(例えば、ある言語が context-free grammar によって、あるいは context-sensitive grammar によって生成されると特徴づけられる様に。) ところが、この

事は多値論理としていうならば、その公理化に他ならない。ところで、Lを公理化するよりも、ある意味で述語論理に equivalent な多値命題論理を公理化した方が論理学としては興味ある、いろいろな application があるかもしれない。ところで、前節までで考察したものは、Surányi の Reduction Form を使ったから $g: N\times N\times N \to \Omega^N$ の如き三次元の有限なものを使った。一般の K の wff は individual variables としては $x_1, x_2 \cdots$ の可算無限個の中から使うのであるから（x, y, z 等は K では使わないとする。）前節で考えたものを無限次元に拡張し

$$g: \prod_{i\in N\cup\{0\}} N_i \to \Omega^N$$

を考える。そして $\prod_{i\in N\cup\{0\}} N_i \ni (x_0, x_1, x_2 \cdots)$ の x_i を i-座標という。

いま、g の各成分の上に w をつけたものを $\overset{w}{g}$ とかき、g とこの $\overset{w}{g}$ の形を、われわれの truth-value と考える。そして、この truth-value の間に logical operations $X_1, X_2 \cdots, \vee, \neg, \exists_{x_1}, \exists_{x_2} \cdots, \exists_t$ に対応する次の truth-value functions を定義する。

(1) X_ν $(\nu = 1, 2 \cdots)$:

wff $\mathfrak{A}$ が g をとるならば、$X_\nu \mathfrak{A}$ は §3 の $X\mathfrak{A}$

に対応するvalueをとり（この場合 x_ν-座標を考える。）その上に w の記号を持つ。又 wff $\mathfrak{A}$ が $\overset{w}{g}$ をとるならば、$X_\nu\mathfrak{A}$ は上と同じ value をとり、その上に w の記号を持つ。

(2) $\vee$： $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ で $\mathfrak{A}$ が $\overset{w}{g}_{\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{B}$ が $\overset{w}{g}_{\mathfrak{B}}$ ならば、$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ は普通の $\overset{w}{g_{\mathfrak{A}}\vee g_{\mathfrak{B}}}$。又 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ のうち少なくとも一つが $g_{\mathfrak{A}}$ ならば、$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ は $\overset{w}{X_0 g_{\mathfrak{A}} \vee g_{\mathfrak{B}}}$ となる。（$\mathfrak{A}$ が $g_{\mathfrak{A}}$ の場合、他も同様）ただし $X_0 g_{\mathfrak{A}}$ は $g_{\mathfrak{A}}$ に X_0 を施した値とする。

(3) $\neg$： $\neg\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A}$ が $\overset{w}{g}_{\mathfrak{A}}$ ならば、$\overset{w}{\neg g_{\mathfrak{A}}}$。又 $\mathfrak{A}$ が $g_{\mathfrak{A}}$ ならば $\overset{w}{X_0 g_{\mathfrak{A}}}$ となる。

(4) $\exists_{x_\nu}$： $\exists_{x_\nu}\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A}$ が $g_{\mathfrak{A}}$ ならば、$\overset{w}{\exists_{x_\nu} X_0 g_{\mathfrak{A}}}$。又 $\mathfrak{A}$ が $\overset{w}{g}_{\mathfrak{A}}$ ならば $\overset{w}{\exists_{x_\nu} g_{\mathfrak{A}}}$。

(5) $\exists_t$： $\exists_t\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A}$ が $g_{\mathfrak{A}}$ ならば、$\overset{w}{\exists_t X_0 g_{\mathfrak{A}}}$。又 $\mathfrak{A}$ が $\overset{w}{g}_{\mathfrak{A}}$ ならば $\overset{w}{\exists_t g_{\mathfrak{A}}}$ となる。

いま、すべての成分が 1 でその上に w がついている $\overset{w}{g}$ を $\overset{w}{[1]}$ とかき、それをわれわれの論理系 L' の designated value という。そして L' の wff $\mathfrak{A}$ が、その propositional variables の truth-value のとり方いかにかかわ

らず、つねにdesignated valueをとるとき validという。このとき、次の定理が成立する。

定理3　L'の任意のwff $\mathfrak{A}$がvalidであるか否かは、決定不能である。

(証明)

§3で与えた$\tilde{\mathfrak{A}}^*$を考える。これはL'の一つのwffであるが(X, Y, ZをX_1, X_2, X_3と考える。)、いまそのpropositional variablesのすべてがg_αの形をとったとき、$\tilde{\mathfrak{A}}^*$が$\overset{w}{\{1\}}$となるか否かは決定出来ない事を示せばよい。ところで、われわれのtruth-valueの構成とtruth-value functionの定義から、いま考えているtruth-valueの

$$(x_0, x_1, x_2 \cdots\cdots) \in \prod_{j \in N \cup \{0\}} N_j \text{ の } x_0, x_4, x_5 \cdots$$

の各成分の値は(x_1, x_2, x_3)で与えられた値のprojectionになっている。したがって§3で示した事から この定理が成立する。

Q. E. D.

§5　特徴づけ

L'のvalid formulaをすべて生成する公理系を考える。いま、次のように定義されるfunction φを考える。

(i)　$\varphi(X_\nu p) = p(t, x_\nu)$　ただし$X_\nu p$の形でないpに対しては　$\varphi(p) = p(t, x_0)$

(ii) $\varphi(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}) \vee \varphi(\mathfrak{b})$

(iii) $\varphi(\neg \mathfrak{a}) = \neg \varphi(\mathfrak{a})$

(iv) $\varphi(\exists_{x_\nu} \mathfrak{a}) = (\exists x_\nu)\, \varphi(\mathfrak{a})$

(v) $\varphi(\exists_t \mathfrak{a}) = (\exists t)\, \varphi(\mathfrak{a})$

いま，$\mathfrak{f}$ で X_μ の free operation とは X_μ が $\exists_{x_\mu}$ の作用域におこらない事と定義する。このとき次の axiom schemata を与える。（ただし $\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g} \doteq \neg \mathfrak{f} \vee \mathfrak{g}$）

1) $\vdash \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f} \vee \mathfrak{g}$

2) $\vdash \mathfrak{f} \vee \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}$

3) $\vdash \mathfrak{f} \vee \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \vee \mathfrak{f}$

4) $\vdash (\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}) \rightarrow (\mathfrak{h} \vee \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{h} \vee \mathfrak{g})$

5) $\vdash \mathfrak{f} \rightarrow \exists_j \mathfrak{f}'$ $\quad (j = x_\nu, t)$

ただし $\exists_t$ の場合をのぞいて左辺の $\mathfrak{f}'$ は，述語論理の普通の公理の様に，j と共にそれに対応する free operation がかわってもよい。

6) $\vdash X_\nu(\mathfrak{f} \vee \mathfrak{g}) \longleftrightarrow X_\nu \mathfrak{f} \vee X_\nu \mathfrak{g}$

7) $\vdash X_\nu \neg \mathfrak{f} \longleftrightarrow \neg X_\nu \mathfrak{f}$

8) $\vdash X_\nu X_\mu \mathfrak{f} \longleftrightarrow X_\nu \mathfrak{f}$

9) $\vdash X_\mu \exists_{x_\nu} \mathfrak{f} \longleftrightarrow \exists_{x_\nu} \mathfrak{f}^{X_\mu}$ $\quad (\mu \neq \nu)$

ただし $\mathfrak{f}^{X_\mu}$ は，次の場合を除き，$\exists_{x_\nu}\mathfrak{f}$ の中の free operation を X_μ でおきかえる事を示す。$\mathfrak{f}$ の中に $\exists_{x_\mu} \mathfrak{g}$ の形があ

るときは $\exists_{x_\lambda}\mathfrak{g}^{x_\mu}$（λはμに等しくない任意の自然数）又 $\mathfrak{f}$がPのときは $\mathfrak{f}^{x_\mu}$ は $X_\mu P$ となる。

10) $\vdash X_\mu \exists_{x_\mu} \mathfrak{f} \longleftrightarrow \exists_{x_\lambda} \mathfrak{f}^{x_\mu}$ （ただし $\mathfrak{f}^{x_\mu}$ は 9) と同様）

11) $\vdash X_\mu \exists_t \mathfrak{f} \longleftrightarrow \exists_t \mathfrak{f}^{x_\mu}$ （上と同じ）

Rule

$\vdash \mathfrak{f},\ \vdash \mathfrak{f} \to \mathfrak{g} \Rightarrow \vdash \mathfrak{g}$

$\vdash \mathfrak{f} \to \mathfrak{g} \Rightarrow \vdash \exists_j \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ 　$(j = x_\mu, t)$

ただし $\mathfrak{g}$ は X_μ をfreeに含まない。又 $\exists_t$ の場合は $\varphi(\mathfrak{g})$ はtをfreeに含まない。

このとき、次の定理が成立する。

補助定理4.1　$\vdash \mathfrak{A}$ ならば、$\mathfrak{A}$ は L' でvalidである。

(略証)

Axiom schemataがすべてvalidである事及びruleがvalidityを保持する事を使えばよい。

Q.E.D.

次も容易に得られる。

補助定理4.2　$\mathfrak{A}$ を L' のwffとする。このとき公理6)—11)を使って X_ν operationが他の X_μ operationの中におこらない様にする事が出来、これら二つのwffは証明可能に関してequivalentである。

(証明)

6)—11)の公理では、左辺と右辺が $\longleftrightarrow$ でむすば

れている事を使えばよい。

Q.E.D.

補助定理 4.3 $\vdash \mathfrak{A} \Rightarrow \vdash \forall_{x_\nu} \mathfrak{A}$ $\qquad$ ($\forall_{x_\nu} \overset{D}{=} \neg \exists_{x_\nu} \neg$)

$$\vdash \forall_{x_\nu}(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \forall_{x_\nu} \mathfrak{B})$$

ただし $\mathfrak{A}$ は x_ν を free に含まない。

(証明)

$\vdash \mathfrak{A}$ から $\vdash p \vee \neg p \to \mathfrak{A}$

∴ $\vdash \exists_{x_\nu} \neg \mathfrak{A} \to \neg (p \vee \neg p)$

即ち $\vdash p \vee \neg p \to \neg \exists_{x_\nu} \neg \mathfrak{A}$

∴ $\vdash \forall_{x_\nu} \mathfrak{A}$

他も同様. $\qquad$ Q.E.D.

定理 4 $\mathfrak{A}$ が L' で valid ならば, $\vdash \mathfrak{A}$ である。

(completeness)

(証明)

$\mathfrak{A}$ が L' で valid ならば, 補助定理 4.2 を使って x_μ operation が他の x_ν operation の中におこらない様にする事が出来る。これを $\hat{\mathfrak{A}}$ とする。このとき $\mathfrak{A}$ と $\hat{\mathfrak{A}}$ は provability に関しても, validity に関しても equivalent である。よって $\hat{\mathfrak{A}}$ がわれわれの公理系で証明出来る事を示せばよい。いま $\varphi(\hat{\mathfrak{A}})$ を考えれば, これは φ の定義から K の wff になる。そして $\varphi(\hat{\mathfrak{A}})$ は

仮定から K の valid formula になる。よって $\vdash_K \varphi(\hat{\mathfrak{A}})$ をうる。ところでこの証明に対応するわれわれの証明図を考えれば、Kの公理とruleに対応するわれわれの公理とruleがあるから（例えば、補助定理4.3により Mendelson [5] のKの公理系を考えればよい。）$\vdash \hat{\mathfrak{A}}$ をうる。したがって補助定理4.2から $\vdash \mathfrak{A}$ をうる。

Q.E.D.

§6 あとがき

以上で、述語論理に対応するある種の無限多値論理とそのtruth-valueをパターンと考えた場合のdecision problem及びproduction ruleの与え方がわかった。ここで考えた論理系 L' は、述語論理の代数化として考えられたCylindric Algebra等と関係を持つものであり、面白いapplicationsがあるかもしれないと思われる。

References

[1] A. Nakamura : On a propositional calculus whose decision problem is recursively unsolvable, Nagoya Math. J. vol. 38 (1970) 145 – 152.

[2] H. Wang : Proving theorems by pattern

recognition II, Bell System Tech. J.
vol. 40 (1961) 1–41.

[3] H. Wang: Dominoes and AEA case of the decision problem, Math. theory of automata, Polytechnic Press, 1963 23–55.

[4] R. Berger: The undecidability of the domino problem, Memoirs of the Amer. Math. Soc.

[5] E. Mendelson: Introduction to mathematical logic, D. van Nostrand Co. 1964.