数理解析研究所講究録
第140巻 1972年 162-179

L-fuzzy 論理

水本雅晴，豊田順一，田中幸吉

（大阪大学・基礎工学部・情報工学科）

あいまいな事柄を数量的に表わすためにZadeh [1] はfuzzy集合なる理論を導入した（1965年）．それ以来，fuzzy集合およびその応用，たとえば，パターン認識，fuzzy論理，fuzzy言語，fuzzy位相空間，fuzzy事象の確率，fuzzyオートマトンなどに関する研究が各方面で盛んに行なわれている．

fuzzy集合に対する数学的な議論は通常の集合の場合のすなおな拡張として議論することができる．fuzzy集合はある集合から区間[0,1]への写像として定義されるが，[0,1]を{0,1}なる区間とするとfuzzy集合は通常の集合となる．Goguenは単に[0,1]でなくもっと一般に半順序集合，束な

どとすることによりL-fuzzy集合なる概念を定式化し，興味深い種々の性質を導き出している[2]．

論理の分野では，(L-)fuzzy集合に基づいてMarinos[3]はfuzzy論理回路に対する基礎的な考察を行なっている．また，Goguen[4]は不正確な概念を表現するための論理(L-fuzzy論理)に関する理論的考察を行ない，2値論理では表現できなかったある種のパラドックスが解決できることを示している．ここではこのGoguenによるL-fuzzy論理についてのあらましを紹介する．

1. L-Fuzzy 集合

まず準備としてfuzzy集合およびL-fuzzy集合について簡単に説明しておく．

（定義1.1） L-fuzzy集合Aとは，集合$X=\{x\}$から半順序集合L（真理値集合と名付ける）への写像のことである．すなわち

$$A: X \to L \qquad (1.1)$$

値$A(x)$は命題"$x \in A$"の真理値を表わす．

ここで，もし$L=[0,1]$ならばL-fuzzy集合AはZadeh

の定義したfuzzy集合となり，さらに$L=\{0,1\}$ならば，Aは通常の集合となる．

L-fuzzy集合の演算は通常の集合の演算の拡張として，つぎのように定義することができる．A，Bをそれぞれ$A: X \to L$，$B: Y \to L$なるL-fuzzy集合とすると

包含　$A \subseteq B \iff A(z) \leqq B(z),\quad z \in X \subseteq Y$　(1.2)

相等　$A = B \iff A(z) = B(z),\quad z \in X = Y$　(1.3)

和　$A \cup B \iff A \cup B(z) = \begin{cases} A(z) & z \in X,\ z \notin Y \\ A(z) \vee B(z) & z \in X \cap Y \\ B(z) & z \notin X,\ z \in Y \end{cases}$　(1.4)

交わり　$A \cap B \iff A \cap B(z) = A(z) \wedge B(z),\quad z \in X \cap Y$　(1.5)

である．ただし，演算$\leqq$，$\vee$，$\wedge$はそれぞれLにおける順序関係，上限，下限を表わす演算である．

ここで，$L=[0,1]$の場合，すなわちZadehによるfuzzy集合である場合，演算$\vee$は$\max$に，$\wedge$は$\min$となり，補集合$\bar{A}$はつぎのように定義される．

補集合　$\bar{A} \iff \bar{A}(x) = 1 - A(x),\quad x \in X$　(1.6)

L-fuzzy関係　直積空間$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$における<u>L-fuzzy関係</u>とは，$X\times Y$におけるL-fuzzy集合Rのことで，つぎのように定義される

$$R : X\times Y \to L \tag{1.7}$$

もし$X=Y$ならば，$X\times X$におけるL-fuzzy関係RをXの上のL-fuzzy関係という．

さらに一般に，直積空間$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$における<u>n項L-fuzzy関係</u>とは，XにおけるL-fuzzy集合Rのことである．すなわち

$$R : X_1\times X_2\times\cdots\times X_n \to L \tag{1.8}$$

L-fuzzy関係においてLを完備束半群，完備分配束とすると，L-fuzzy関係の<u>合成</u>（あるいは<u>積</u>）はつぎのように表わされる．R_1, R_2 とXの上の，すなわち$X\times X\to L$なるL-fuzzy関係とすると，合成R_1R_2はつぎのようになる．

(1) Lが完備束半群である場合：

$$R_1R_2(x,z)=\bigvee_{y} R_1(x,y)*R_2(y,z) \tag{1.9}$$

ただし，$\vee$，$*$ はそれぞれ完備束半群 L における上限，半群の演算である．

(2) L が完備分配束である場合：

$$R_1R_2(x,z) = \bigvee_y R_1(x,y) \wedge R_2(y,z). \qquad (1.10)$$

《備考》 完備束 L が，演算 $*$ の下で単位元をもつ半群であり，かつ，つぎの分配律を満たすとき，L を完備束半群(complete lattice ordered semigroup)という．

$x, y, x_i, y_i \in L$ に対して

$$x * \bigvee_i y_i = \bigvee_i (x * y_i),$$

$$(\bigvee_i x_i) * y = \bigvee_i (x_i * y).$$

完備束半群 L において，$*$ を $\wedge$ におきかえると，L は完備分配束(complete distributive lattice)となる．

簡単な例として，L を [0,1] とし，$\vee$ を max，$*$ を $\cdot$（通常の掛算）とすると，完備束半群となる．さらに，$\cdot$ の変わりに min を採用すると，完備分配束となる．

L-fuzzy関係Rが，Zadehによるfuzzy関係，すなわち

$$R : X \times X \to [0, 1] \qquad (1.11)$$

であると，fuzzy関係R_1，R_2 の合成は(1.9)，(1.10)において，$\vee \to \sup$，$* \to \cdot$（積算），$\wedge \to \min$ と書き変えることにより，つぎのように表わされる．

$$R_1R_2(x, z) = \sup_y [R_1(x, y) \cdot R_2(y, z)] \qquad (1.12)$$

$$R_1R_2(x, z) = \sup_y \min [R_1(x, y), R_2(y, z)] \qquad (1.13)$$

つぎにL-fuzzy関係において成立する基本的な性質を述べてみよう．まず，L-fuzzy関係の演算について述べよう．L-fuzzy関係はL-fuzzy集合であるので，L-fuzzy集合の場合と同様にL-fuzzy関係の包含($\subseteq$)，和($\cup$)，交わり($\cap$)などがつぎのように定義される．$x, y \in X$ とすると

1. $R_1 \subseteq R_2 \iff R_1(x, y) \leqq R_2(x, y)$ (1.14)
2. $R_1 \cup R_2 \iff R_1 \cup R_2(x, y) = R_1(x, y) \vee R_2(x, y)$ (1.15)
3. $R_1 \cap R_2 \iff R_1 \cap R_2(x, y) = R_1(x, y) \wedge R_2(x, y)$ (1.16)

L-fuzzy関係をZadehによるfuzzy関係とすると

4. $\bar{R}_1 \iff \bar{R}_1(x, y) = 1 - R_1(x, y)$ (1.17)

L-fuzzy関係の逆L-fuzzy関係R^cは

5. $R^c \iff R^c(y, x) = R(x, y)$ (1.18)

さらにつぎのような基本的なL-fuzzy関係が定義できる。ただし，I，0はそれぞれLにおける最大元，最小元である。

6. $I \iff I(x, y) = \begin{cases} I & \cdots\ x = y \\ 0 & \cdots\ x \neq y \end{cases}$ (1.19)

7. $O \iff O(x, y) = 0$ (1.20)

8. $E \iff E(x, y) = I$ (1.21)

これよりL-fuzzy関係に対して，つぎのような基本的な性質が導びかれる．

(a) $(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$ (1.22)

(b)
$$IR = RI = R$$
$$OR = RO = O$$
$$ER = RE = E$$
(1.23)

(c) $S \subseteq T$ならば
$$RS \subseteq RT$$
$$SR \subseteq TR$$
(1.24)

(d) $$R(\bigcup_i R_i) = \bigcup_i (RR_i) \qquad (1.25)$$
$$(\bigcup_i R_i)R = \bigcup_i (R_iR)$$

(e) $$R(\bigcap_i R_i) \subseteq \bigcap_i (RR_i) \qquad (1.26)$$
$$(\bigcap_i R_i)R \subseteq \bigcap_i (R_iR)$$

(f) $$(R_1R_2)^c = R_2^c R_1^c \qquad (1.27)$$

(g) $$(\bigcup_i R_i)^c = \bigcup_i R_i^c \qquad (1.28)$$
$$(\bigcap_i R_i)^c = \bigcap_i R_i^c$$

(h) $$(R^c)^c = R \qquad (1.29)$$

X 上の L-fuzzy 関係 R が<u>対称的</u>（symmetric）であるとは，

$$R = R^c,\ \text{すなわち}\ R(x,y) = R(y,x),\ x,y \in X$$

となることである．R が<u>反射的</u>（reflexive）であるとは

$$R \supseteq I,\ \text{すなわち}\ R(x,x) = I,\ x \in X$$

となることである．R が<u>推移的</u>（transitive）であるとは

$$RR \subseteq R,\ \text{すなわち}\ \bigvee_z R(x,z) * R(z,y) \leq R(x,y)$$

となることである．

2. L-fuzzy論理

通常の2値論理においては，真，偽いずれかがまえもってきまっているものだけに限定するものである．しかし，実際には真，偽だけでは片付けられない命題が沢山ある．たとえば"x is short"という命題は真，偽だけでは論じられない。このようなあいまいな命題を取り扱うにはfuzzy集合，もっと一般にはL-fuzzy集合の概念が役立つ．

2値論理においては，命題$P(x)$は，$X=\{x\}$を定義域とし，$\{0,1\}$を値域（すなわち，偽$=0$，真$=1$）とする1変数関数で表わされる．これを1変数の述語と呼んでいる．さらに一般に直積$X^n=X\times X\times\cdots\times X$上で定義され，値域として$\{0,1\}$を持つ関数$P:X^n\to\{0,1\}$をn変数の述語，またはn項関係ともいう．

この2値論理におけるn変数の述語の値域$\{0,1\}$をある半順序集合Lにおきかえると，つぎのようにn変数のL-fuzzy述語が定義できる。

（定義2.1）　n変数のL-fuzzy述語（簡単にn項L-述語ともいう）とは，Lをある半順序集合とすると，

$$P: X^n \to L \tag{2.1}$$

なる関数である.

これより, 1項L-述語はX上のL-fuzzy集合となり, 2項L-述語はL-fuzzy関係となる.

(注) $L=[0,1]$ の場合, すなわちZadehによるfuzzy集合の場合, $[0,1]$ をJとおき, n項L-述語をn項J-述語ということがある.

[例] "x is short" という命題は1項J-述語, すなわちfuzzy集合Sで表わされる. また, "x looks like y" という命題は2項J-述語, すなわちfuzzy関係Rで表わされる. この命題S, Rを用いて命題P "being short and looking like x" を考えよう. この場合, $P(y)$ は $P(y)=S(y)\wedge R(x,y)$ と表わすことができる. ここで"$\wedge$"は"and"をモデル化したもので, 値 $S(y)$ と $R(x,y)$ の小さい方を取るものとする. 同様に"or"は"$\vee$"で表わすことができる. しかし, この例においてはshortnessとlooks likeとは相関関係があるので $\wedge$ の変わりに掛算・を採用した方がよいであろう. すなわち $P(y)=S(y)\cdot R(x,y)$.
一般に言語の記述の場合, "and"を表わすのには $\wedge$ よりも・を使った方がいいように思われる. 掛算の場合

$$a\cdot b \leqq a\wedge b$$

が成立し, この場合"or"は双対的に

$$a \hat{+} b = 1-(1-a)(1-b) = a+b-a\cdot b$$

と表わされる．明らかに

$$a \hat{+} b \geqq a \vee b$$

となる．

次に命題K "looking like a man who lives near x" を考えてみよう．"lives near" は fuzzy 関係Nによって表わされているものとする．すると命題K(y) は fuzzy 関係の合成（式(1.12)）を使うことにより RN(y, x) で表わされる．すなわち

$$RN(y, x) = \bigvee_{z \in X} R(y, z) \cdot N(z, x)$$

2つの1項J-述語を1つの2項J-述語に変換する演算 π を導入することができる．A, B を1項J-述語とすると $(A \pi B)(x, y) = A(x) \wedge B(y)$ なる2項J-述語に変換できる。たとえば，Bを "x is bald man" なる命題とすると，命題 "x is short and y is bald" は $S\pi B(x, y)$ で表わされる．演算 π は種々の応用に使える。もし，Iを "y is man" なる述語とすると，$B\pi I(x, y)$ は $B(x)$，すなわち "x is bald" となる。

次に命題Q "being short and looking like a bald man who lives near x" なる命題が与えられているものとする．すると命題Q(y) は

$$S(y) \wedge [(R \wedge (B\pi I)) N(y, x)]$$

と表わされる．特に，$R \wedge (B\pi I)(y, z) = R(y, z) \wedge B(z)$ と表わされ，"looks like a bald man" を表わしている．上式を書き直すと

$$S(y) \wedge \bigvee_{z \in X} [R(y, z) \wedge B(z)] \cdot N(z, x)$$

となる．分配律を使い，$\vee$ を sup，$\wedge$ を min に書き変えると

$$\sup\{\min\{S(y), R(y,z) \cdot N(z, x), B(z) \cdot N(z, x)\} \mid z \in X\}$$

となる．これは "being short and looking like a short bald man who lives near x" なる命題を表わしている．これは先程の命題Qと等値になっていることがわかる．

L-fuzzy論理における命題に対する和，交わり，包含などの演算はL-fuzzy集合の場合とまったく同じ様に定義される（(1.2)～(1.5) 参照）。真理値集合Lが完備束半群の場合，含意，否定などの演算はつぎのようになる．

Lが完備束半群の場合，$a, b, x \in L$ とすると，含意 $\rightarrow$ は

$$a \rightarrow b = \vee \{x \mid a * x \leq b\} \tag{2.2}$$

と定義される[†]．ここで $*$ は半群の演算である．

たとえば，$L = [0,1]$，$\vee = \max$，$* = \cdot$（掛算）とすると

$$a \rightarrow b = \begin{cases} \dfrac{b}{a} & \cdots\ a > b \\ 1 & \cdots\ a \leq b \end{cases}$$

となる．

この場合，modus ponens は

$$a * (a \rightarrow b) \leq b$$

となる．

---

† Lが完備分配束の場合，$* = \wedge$ とおくことにより，含意は

$$a \rightarrow b = \vee \{x \mid a \wedge x \leq b\}$$

となり，Brouwerian 論理の場合と同じになる．さらにLがブール代数の場合，よく知られた含意の公式

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$$

が導かれる．

含意→に対して次の基本的な公式が導かれる．

《性質》　Lを完備束半群とし，$a, b, c, x, a_i, b_i \in L$とすると

1°　$a * x \leqq b \iff x \leqq (a-b)$

2°　$a \to I = I,\ 0 \to a = I,\quad I \to b = b$

3°　$(a \to b) * (b \to c) \leqq (a \to c)$

4°　$(\bigvee_i a_i) \to b = \bigwedge_i (a_i \to b)$

5°　$a \to (\bigwedge_i b_i) = \bigwedge_i (a \to b_i)$

6°　$(a \to (a * b)) \geqq b$

7°　$(a * b) \to c = b \to (a \to c)$

8°　$\bigvee_i (a_i \to b) \leqq (\bigwedge_i a_i) \to b$

9°　$\bigvee_i (a \to b_i) \leqq a \to (\bigvee_i b_i)$

10°　$a \geqq b$ならば，

$(a \to c) \leqq (b \to c),\quad (c \to a) \geqq (c \to b)$

次に，否定は含意を用いることにより

$$a' = a \to 0 \tag{2.3}$$

と表わされる．すなわち $a' = \vee\{x \mid a * x = 0\}$ である．

$*$が可換である場合，否定に関して次の公式が得られる．

《性質》 Lが可換完備束半群である場合，

1° $0' = I, \quad I' = 0$

2° $a \leqq b \Rightarrow a' \geqq b'$

3° $a'' \geqq a, \quad a''' = a'$

4° $x \leqq a' \Leftrightarrow a * x = 0$

5° $(\bigvee_i a_i)' = \bigwedge_i a_i'$

6° $\bigvee_i a_i' \leqq (\bigwedge_i a_i')$

L-fuzzy論理式Aに対する真理値を[A]と表わすと，和，交わり，含意，否定，積などは

$$[A \vee B] = [A] \vee [B] \tag{2.4}$$

$$[A \wedge B] = [A] \wedge [B] \tag{2.5}$$

$$[A \Rightarrow B] = [A] \rightarrow [B] \tag{2.6}$$

$$[\neg A] = N([A]) \tag{2.7}$$

$$[A * B] = [A] * [B] \tag{2.8}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow [A] \leqq [B] \tag{2.9}$$

$$A \equiv B \Leftrightarrow [A] = [B] \tag{2.10}$$

と表わされる．ここで含意，否定は(2.2)，(2.3)より定義される．

さらに、全称記号$\forall$、存在記号$\exists$が論理式に含まれる場合、

$$[\exists x P] = \bigvee_{x\in X}[P(x)] \tag{2.11}$$

$$[\forall x P] = \bigwedge_{x\in X}[P(x)] \tag{2.12}$$

と定義される.

これより、次式が成立する.

$$(A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow C) \subseteq (A \Rightarrow C)$$

$$((\exists x A(x)) \Rightarrow B) \equiv \forall x (A(x) \Rightarrow B)$$

$$(A \Rightarrow \forall x B(x)) \equiv \forall x (A \Rightarrow B(x))$$

$$((A * B) \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$\exists x (A(x) \Rightarrow B) \subseteq (\forall x A(x)) \Rightarrow B$$

$$\exists x (A \Rightarrow B(x)) \subseteq A \Rightarrow \exists x B(x)$$

$$A \subseteq \neg\neg A, \quad \neg\neg\neg A \equiv \neg A$$

$$\neg(\forall x A(x)) \supseteq \exists x \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x A(x)) \equiv \forall x \neg A(x)$$

また、$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow A)$ なる記法を使うと上式より、次式はトートロジーとなる.

$$((A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

$$((\exists_x A(x)) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists_x (A(x) \Rightarrow B)$$

$$(A \Rightarrow \forall_x B(x)) \Leftrightarrow \forall_x (A \Rightarrow B(x))$$

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow (A * B))$$

$$((A * B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$(\exists_x (A(x) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\forall_x A(x)) \Rightarrow B$$

$$(\exists_x (A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow \exists_x B(x))$$

$$A \Rightarrow \neg\neg A, \quad \neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A$$

$$(\exists_x \neg A(x)) \Rightarrow \neg (\forall_x A(x))$$

$$\neg (\forall_x B(x)) \Leftrightarrow \forall_x \neg B(x)$$

参考文献

1. L.A.Zadeh: "Fuzzy sets", Inform. Control 8, 338-353(1965).
2. J.A.Goguen: "L-fuzzy sets", J. Math. Anal. Appl., 18, 145-174 (1967)
3. P.N.Marinos: "Fuzzy logics and its application to switching systems", IEEE Trans. on Computers, c-18, 4, 343-348 (1969).
4. J.A.Goguen: "The logic of inexact concepts", Synthese, 19, 325-373 (1968).

5. G. Birkhoff : "Lattice Theory", AMS Collo. Pub., 25, Providence, R.I., 1948.

6. 水本, 豊田, 田中 : "Fuzzy代数", 京大数解研究所講究録81, 多値論理およびその応用研究会報告集, (昭45-03).

7. M. Mizumoto, J. Toyoda, and K. Tanaka : "General formulation of formal grammars", Information Sciences (to appear).