数理解析研究所講究録
第 141 巻 1972 年 159-168

正則写像の接続について

福岡大理　吉田守

§1、序

複素解析的多様体Xから複素解析空間Yへの正則写像のある族を$\mathcal{F}$とする。また$\tilde{X}$をXの正則包とし，$\tilde{\varphi}$を$X \longrightarrow \tilde{X}$の標準写像とするとき，任意の$f \in \mathcal{F}$に対して，$F \circ \tilde{\varphi} = f$をみたす写像$F : \tilde{X} \longrightarrow Y$は存在するかという問題に対して，結果は一般には否定的である。

反例としては　$X = Y = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ;\ 1 < |z_1|^2 + |z_2|^2 < 4\}$，$\mathcal{F}$として　恒等写像$\iota : X \longrightarrow Y$のみから成る写像族を考えればよい。しかし$Y$がスタイン多様体のときには結果は肯定的であることが知られている(例えば[2])。

本講演では，Xがスタイン多様体上の被拡領域で，Yが複素リー群またはスタイン空間のときはDocquier-Grauert [1]によるP_7－凸という概念を用いて，結果が肯定的であることを述べる。これは講演者が短期研究員として数理研に滞在中，

安達氏，鈴木氏と共同で得た結果である。Yが複素リー群のときは他にYのリー環からYの中への指数写像を利用する。

§2. P_7−凸領域

(X,ψ)はスタイン多様体S上の被拡領域とし，Yは複素リー群またはスタイン空間とする。$\mathfrak{F}$はXからYへの正則写像のある族とし，$\mathfrak{F}$の最大接続領域を$(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{\psi}})$とし，今後この$(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{\psi}})$を$(G,\Phi)$とかく。このような$(G,\Phi)$は同型を除いて一意的に存在することが知られている。更に$X\to G$の標準写像をΦとおこう。

今 $\mathcal{D}\equiv\{(z_1,\dots,z_n)\,;\,|z_1|\leqq 1,|z_2|<1,\dots,|z_n|<1\}$

$\delta\mathcal{D}\equiv\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathcal{D}\,;\,|z_1|=1\}$

∂Gは(G,Φ)の境界をあらわすとする。

定義1. S上の被拡領域(G,Φ)に対して，$\bar{\mathcal{D}}$から$G\cup\partial G$への連続写像φは次の条件をみたすとき，Gの'境界写像'という；(1) $\varphi(\delta\mathcal{D})\subset\subset G$ ，$\varphi(\mathring{\mathcal{D}})\subset G$

(2) $\varphi(\bar{\mathcal{D}})\cap\partial G\neq\phi$

(3) $\pi\equiv\Phi\circ\varphi$ は$\bar{\mathcal{D}}$の近傍からSへの双正則写像に接続できる。

定義2. (G,Φ)が定義1の境界写像をもたないとき，Gをスタイン多様体S上の"P_7−凸領域"という。

(定義1, 2は何れもDocquier-Grauert [1]による。)

Docquier-Grauert [1] は次の定理を示した。

定理 1. スタイン多様体 S 上の P_7-凸領域 (G,Φ) はまたスタイン多様体である。

従って，(G,Φ) は正則領域である。([2], p.39)

ところで，X の正則包 $\tilde{X}$ は S 上の，X より大きい最小の正則領域であるから，我々は次の定理を得る。

補題 1. $(\tilde{X},\tilde{\varphi})$ をスタイン多様体 S 上の被拡領域 (X,φ) の正則包，$\tilde{\varphi}$ を $X\to\tilde{X}$ の標準写像とし，上述の (G,Φ) が S 上の P_7-凸領域ならば，任意の $f\in\mathfrak{F}$ (上述) に対して，

$F\circ\tilde{\varphi}=f$ をみたす写像 $F:\tilde{X}\to Y$ が存在する。

(証明) 上の注意から $\Phi=\tau\circ\tilde{\varphi}$ をみたす $\tau:\tilde{X}\to G$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
\tilde{X} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\tau"] & & G \arrow[ul, "\tilde{\tilde{f}}"'] \\
& X \arrow[ul, "\tilde{\varphi}"] \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

$f:X\to Y$ の G への接続を $\tilde{\tilde{f}}$ とすれば $F\equiv\tilde{\tilde{f}}\circ\tau$ が我々の求めるものである。(証了)

§3. Y が複素リー群 L の場合

定理 2. L が複素リー群のとき，S 上の被拡領域 (G,Φ) は P_7-凸領域である。

(証明) (G,Φ) が P_7-凸でないとして矛盾を導こう。(G,Φ) が P_7-凸でないとすれば定義より $\varepsilon<\frac{1}{6}$ をみたす正数 ε に対して次のようなことが起る：

$D \equiv \{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ |z_1|<1+2\varepsilon,\ |z_2|<1,\cdots,|z_n|<1\}$

$\cup\{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ 1-\varepsilon<|z_1|<1+2\varepsilon,\ |z_2|<1+2\varepsilon,\cdots,|z_n|<1+2\varepsilon\}$

$E \equiv \{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ |z_1|<1+2\varepsilon,\ |z_2|<1-\varepsilon,\cdots,|z_n|<1-\varepsilon\}$

$\cup\{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ 1-2\varepsilon<|z_1|<1+2\varepsilon,\ |z_2|<1+2\varepsilon,\cdots,|z_n|<1+2\varepsilon\}$

とおくとき，$\varphi(D)\subset G$，　$\varphi(\bar{D})\cap\partial G\neq\phi$，$\varphi(E)\subset\subset G$

をみたす境界写像$\varphi:\bar{\mathcal{D}}\longrightarrow G\cup\partial G$ が存在する。ここに

$\mathcal{D}=\{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ |z_1|\leqq 1,\ |z_2|<1,\cdots,|z_n|<1\}$ である。

定理２を示すのに次の補題２，３を必要とする。

補題２．上述のEは解析的に可縮である。

(証明) 写像 $l:E\times[0,1]\longrightarrow E$ を次で定義する；

$$l(z,t)=\begin{cases}(z_1,tz_2,\cdots,tz_n) & (\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1)\\ (2tz_1,tz_2,\cdots,tz_n) & (0\leqq t\leqq\frac{1}{2})\end{cases}$$

このとき　$l(z,1)=$恒等写像，$l(z,0)=0$，またtを固定すれば$l(z,t)$は正則写像で　tを１から０まで動かすときEはE内で連続的に一点０に縮まる。(証了)

補題３．Eの正則包を$\tilde{E}$とかくとき，

$\tilde{E}=\{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ |z_1|<1+2\varepsilon,\ |z_2|<1+2\varepsilon,\cdots,|z_n|<1+2\varepsilon\}$

さて，定理２の証明にかえろう。$\mathfrak{O}_L$をLに値をもつ正則写像の芽のなす層とし，$\mathfrak{F}\equiv H^1(E,\mathfrak{O}_L)$にCU-位相を入れて位相群にする。リー群とリー環の理論から，Lの次元をnとすれば，$\mathbb{C}^n$からLへの正則な指数写像(exponential mapping)

が存在して，$e\in L$ の単位元とすれば $\mathbb{C}^n$ の原点のある近傍 $U(0)=\{|z_\nu|<2a\}$ を $\exp|U(0)$ は e のある近傍 $W(e)$ に双正則に写す。

そこで $\log\equiv(\exp|U(0))^{-1}$ とおくと，対数写像 $\log : W(e)\longrightarrow U(0)$ は双正則写像となる。

コンパクト集合 K を次で定義する：

$$K\equiv\{(z_1,\cdots,z_n)\,;\ |z_1|\leqq 1+\varepsilon,\ |z_2|\leqq 1-2\varepsilon,\cdots,\ |z_n|\leqq 1-2\varepsilon\}$$
$$\cup\{(z_1,\cdots,z_n)\,;\ 1-\varepsilon\leqq|z_1|\leqq 1+\varepsilon,\ |z_2|\leqq 1+\varepsilon,\cdots,\ |z_n|\leqq 1+\varepsilon\}$$

このとき $V(1)=\{t\in\mathfrak{T}\,;\ t(K)\subset\exp\{|z_\nu|<a\}\}$ は CU-位相の定義より $\mathfrak{T}$ の単位元 1 の近傍である。補題1により E は解析的に可縮であるから $\mathfrak{T}$ は連結である。連結なリー群 $\mathfrak{T}$ は 1 の近傍 $V(1)$ から生成される。

従って任意の $t\in\mathfrak{T}$ は，$t=t_1\cdots t_s$，$t_j\in V(1)$, $j=1,\cdots,s$ と分解でき $\log t_j$ は K から $U(0)$ への正則写像である。

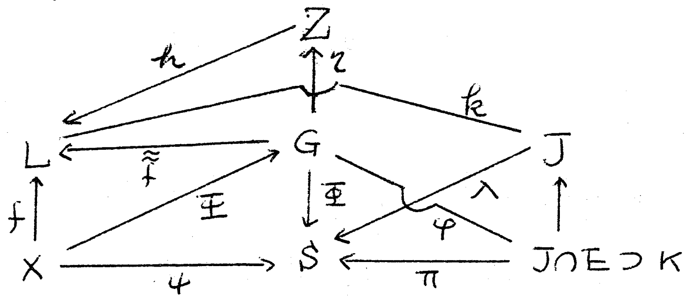
補題2より，$J\equiv\{(z_1,\cdots,z_n)\,;\ |z_1|<1+\varepsilon,\cdots,|z_n|<1+\varepsilon\}$ とおくとき $h_j|K\cap J=\log t_j$ をみたす正則写像 $h_j : J\longrightarrow U(0)$ が存在する。

そこで $T_j\equiv\exp h_j$ $(j=1,\cdots,s)$，$T\equiv T_1T_2\cdots T_s$ とおくと $T|K\cap J=t$ で $T : J\longrightarrow U(0)$ は正則写像である。

また，t は E から L への正則写像であったことに注意すれば $\tilde{t}|J\cap E=t$ をみたす正則写像 $\tilde{t} : J\longrightarrow L$ が存在する。

双正則写像 $\pi : J\cap E\longrightarrow S$ に対しては次図が可換である

ような projection $\lambda : J \to S$ が存在する。



今 disjoint union $M \equiv G \cup J$ に、$x_1, x_2 \in M$,

$x_1 \in G$, $x_2 \in J$, $\Phi(x_1) = \lambda(x_2)$ $(\in S)$ のとき

$(f \circ \Phi^{-1})_{\Phi(x_1)} = k_{x_2}$ （ここに $f : G \to L$ は正則写像とする。）

のときに x_1 と x_2 を同一視することにより同値関係を入れる。このときの同値類による M の商集合を $Z \equiv M/\sim$ とおくと一致の定理よりこれはハウスドルフ空間となる。

写像 $\varsigma : Z \to S$ を次で定義する；

$$\varsigma(x) = \begin{cases} \Phi(x_1) & ([x_1] \in G) \\ \lambda(x_2) & ([x_2] \in J) \end{cases}$$

商空間の作り方より $\varsigma(x)$ は Z から S への局所双正則写像で Z は S 上の被拡領域となる。

任意の $f \in \mathcal{F}$ の G への接続を $\tilde{\tilde{f}}$ とするとき、正則写像 $h : Z \longrightarrow L$ を次で定義する；

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{\tilde{f}}(x_1) & ([x_1] \in G) \\ k(x_1) & ([x_2] \in J) \end{cases}$$

このとき標準写像 $G \cup J \longrightarrow Z$ の G への制限を τ とし、

injective mapping $\mathfrak{J}\longrightarrow Z$ を ξ とするとき, $h\circ\xi=\tilde{\tilde{f}}$ を得る。これは (G,Φ) が関数族 $\mathfrak{F}$ の最大接続領域としたのに (G,Φ) より大きい (Z,ξ) まで接続されることになり矛盾を生じた。

以上から (G,Φ) は P_7-凸領域である。(証了)

§4. Y がスタイン空間の場合

定理3. 前定理で複素リー群 L をスタイン空間 Y でおきかえたときも, $\mathfrak{S}$ 上の被拡領域 (G,Φ) は P_7-凸領域である。

(証明) (G,Φ) が P_7-凸でないとすれば定義よりある正数 ε に対して次のようなことが起る:

$$E\equiv\{(z_1,\cdots,z_n)\,;\,|z_1|<1+\varepsilon,\ |z_2|<1-\varepsilon,\cdots,|z_n|<1-\varepsilon\}$$
$$\cup\{(z_1,\cdots,z_n)\,;\,1-\varepsilon<|z_1|<1+\varepsilon,\ |z_2|<1+\varepsilon,\cdots,|z_n|<1+\varepsilon\}$$

とするとき $\varphi(E)\subset\subset G$ をみたす境界写像 φ が存在する。

Y はスタイン空間であるので岡・ヴェイユの解析的多面体で内側から近似される。従って任意の $f\in\mathfrak{F}$ に対して,

$f(\varphi(E))\subset\subset P\subset\subset Y$ をみたす解析的多面体 P が存在する。このとき次のことが知られている:

P を十分次元の高い複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^N$ の中の多重円板 $\Delta=\{(w_1,\cdots,w_N)\in\mathbb{C}^N\,;\,|w_1|<1,\cdots,|w_N|<1\}$ の中に双正則に写し Δ における P の像 $\tau(P)$ が解析的集合となるような写像 $\tau:P\longrightarrow\Delta$ が存在する。即ち任意の $w_0\in\Delta\cap\tau(P)$

に対して，Δにおけるw_0の近傍$U(w_0)$と正則関数$h_i : U(w_0)\to \mathbb{C}$
($i=1,2,\cdots,s$) が存在して，

$$\tau(P)\cap U(w_0)=\{w\in U(w_0)\ ;\ h_1(w)=0,\cdots,h_s(w)=0\}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] & G \arrow[r, "\tilde{\tilde{f}}"] & Y \\ & & P \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, dash, "\tau"] & \Delta \subset \mathbb{C}^N \end{tikzcd}$$

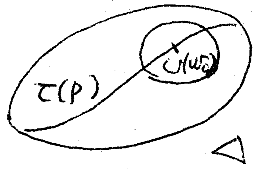
であって，$\tilde{\tilde{f}}(\varphi(E))\subset\subset P$に注意すれば$\tau\circ\tilde{\tilde{f}}\circ\varphi$は$E$から$\Delta$の中への正則写像となる。

今，Eの正則包を$\tilde{E}$とすると，$\tilde{E}=\{(z_1,\cdots,z_n)\ ;\ |z_1|<1+\varepsilon,\cdots,|z_n|<1+\varepsilon\}$で，$g|E=\tau\circ\tilde{\tilde{f}}\circ\varphi$をみたす正則写像$g:\tilde{E}\longrightarrow\mathbb{C}^N$が存在する。$\Delta$は多重円板だから$g:\tilde{E}\longrightarrow\Delta$である。

$g(x)=w_0\in\Delta\cap\tau(P)$をみたす任意の$x\in\tilde{E}$に対して，

$h_i\circ g:\tilde{E}\cap\tau^{-1}(U(w_0))\longrightarrow\mathbb{C}$ であり

$h_i\circ g(x)=0$



即ち　$\tilde{E}\cap\tau^{-1}(U(w_0))$にて　$h_i\circ g=0$

$\tilde{E}\cap\tau^{-1}(U(w_0))\subset\tau^{-1}(U(w_0))$

一致の定理より　$\tau^{-1}(U(w_0))$にて　$h_i\circ g=0$

従って　$A\equiv\{x\in\tilde{E}\ ;\ g(x)\in\tau(P)\cap\Delta\}$とおくと，$A$は開集合である。また$A$は解析的集合の原像であるので**解析的**集合，従って閉集合でもある。$\tilde{E}$は連結であるからAは$\tilde{E}$自身と一致する。　即ち　$A=\tilde{E}$

従って　$g(\tilde{E})\subset\tau(P)$　を得る。

disjoint union $M = G \cup \tilde{E}$ に§3の場合と同様の同値関係を入れて，$\mathfrak{S}$上の被拡領域 $Z = G \cup \tilde{E}/\sim$ を得，正則写像 $g^*: Z \longrightarrow Y$ が次で定義される；

$$g^*(x) = \begin{cases} \tilde{\tilde{f}}(x) & ([x] \in G) \\ \tau^{-1} \circ g(x) & ([x] \in \tilde{E}) \end{cases}$$

これは§3と同様に関数族子が G より大きい Z まで接続されることになり，G のとり方に矛盾する。故に (G, Φ) は P_Y-凸領域である。（証了）

§5．主要な結果

補題1，定理1，2，3より次の我々の目的の定理を得る。

定理4．(X, φ) をスタイン多様体 $\mathfrak{S}$ 上の被拡領域，Y を複素リー群またはスタイン空間，$(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ を (X, φ) の正則包，$\tilde{\varphi}: X \longrightarrow \tilde{X}$ を標準写像とする。このとき X から Y の中への任意の正則写像 f は $\tilde{X}$ から Y の中への正則写像 $\tilde{f}$ へ接続される。即ち $f = \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$ をみたすような $\tilde{X}$ から Y の中への正則写像 $\tilde{f}$ が存在する。

定理5．(X, φ) をスタイン多様体 $\mathfrak{S}$ 上の被拡領域，Y を複素リー群またはスタイン空間とするとき，次の命題は同値である。

(1) X はスタイン多様体である。

(2) X は，X から Y の中への一つの正則写像の正則領域

である。

(3) X は, X から Y の中へのある正則写像の族の正則被である。

(4) X は, X から Y の中へのすべての正則写像の族の正則被である。

いいかえれば, X から Y の中への正則写像族に関しても X 上の正則関数に関すると同様に, 正則領域論が展開される。

参考文献

[1] F. Docquier und H. Grauert, Levische Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Manigfaltigkeit, Math. Ann. 140 (1960) p.94-123

[2] J. Kajiwara, On the limit of a monotonous sequence of Cousin's domain. J. Math. Soc. Japan (1965) p.36-46

[3] R. Remmert, Projection analytischer Mengen, Math. Annalen. 130 (1956) p.410-441

[4] ____, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Ibid. 133 (1957) p.328-370

[5] R. C. Gunning and H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Printice Hall (1965)

[6] 一松信, 多変数解析函数論　培風館 (1960)