数理解析研究所講究録
第143巻 1972年 107-121

積分表示と近似問題

阪大 教養　阪井 章

§1. はじめに —— $\mathbb{C}^1$の場合

複素平面$\mathbb{C}^1$上のコムパクトな台をもつ複素測度μに対して

(1) $$\tilde{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$$

を考える. $\int|\zeta-z|^{-1}d|\mu|(\zeta)$は局所可積分であるから$\tilde{\mu}(z)$は殆んど到る処有限で, μの台の外では正則である.

Kを$\mathbb{C}^1$のコムパクト集合とし, R(K)をK上に極をもたない有理関数によってK上一様近似される関数の全体とする.

次の2つの補題はR(K)の関数解析的研究に重要な役割を果す.

<u>補題1</u> $\tilde{\mu}(z) = 0$ a.e. $\Rightarrow \mu = 0$.

<u>補題2</u> $\mu \perp R(K) \Leftrightarrow \tilde{\mu}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus K$.

例えば, Lavrentieffの定理:

$$P(K) = C(K) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{C}\setminus K \text{ が連結.} \\ \mathrm{int}(K) = \phi \end{cases}$$

の簡単な証明が得られる. ([1]). また.

定理1（Bishop の peak point theorem [2]）　K の殆んどすべての点が $R(K)$ の peak point ならば　$R(K) = C(K)$.

$$\left(\begin{array}{l} K\text{の点 } z \text{ が } R(K) \text{ の peak point であるとは} \\ \qquad f(z) = 1 > |f(z')| \qquad \forall z' \in K,\ z' \neq z \\ \text{となる } f \in R(K) \text{ が存在することである.} \end{array}\right)$$

補題3　$\{U_j\}$ を K の有限開被覆とするとき，$\mu \perp R(K)$ に対し U_j 内に台をもつ $\mu_j \perp R(K)$ があって $\mu = \Sigma \mu_j$.

および，これから導かれる

定理2（Bishop [3]）—局所化定理—　$f \in C(K)$ とする. K の各点 z に対して，近傍 U_z があって　$f|(\bar{U}_z \cap K) \in R(\bar{U}_z \cap K)$ ならば $f \in R(K)$.

などが補題1，2から証明される．（定理2の簡単な証明は[4]）.

定理2は次の Mergelyan の定理[5]の簡単な証明を与える.

定理3　$\mathbb{C}\setminus K$ の成分の直径がある正数より小さくなければ（特に，$\mathbb{C}\setminus K$ の成分が有限個ならば）$R(K) = A(K)$.

こゝで $A(K)$ は K 上で連続で K の内部で正則な関数全体.

補題1，2の証明は，それぞれ，次の2つの Cauchy 核の性質から導かれる.

（I）開集合 G 内にコムパクトな台をもつ C^1-関数 f に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \qquad z \in G.$$

(II) $(\zeta - z)^{-1}$ は z 以外で ζ について正則. 有限個の滑らかな閉曲線で囲まれた領域 G と $\bar{G}$ で正則な関数 f に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in G.$$

§2. 開いたリーマン面の場合

X を開いたリーマン面, K をそのコムパクト部分集合とする. K の近傍で正則な関数によって K 上一様近似される関数の全体を $H(K)$ とする. $X = \mathbb{C}^1$ のときは $H(K) = R(K)$ である. (Runge の定理). $H(K)$ に対する peak point および $A(K)$ は §1 と同様に定義する.

(I), (II) に相当する性質をもつ核として, こゝでは Behnke-Stein の核 ([6]) を用いる. $p, q \in X$ に対し $\omega(p, q)$ は次の性質をもつ: $\omega(p, q)$ は p について, $p = q$ でのみ留数 $2\pi i$ の1位の極をもつ有理型微分で, $\omega(p, q) = k(z, q)\, dz$ と書くことにすれば, 点 p とその近くでの局所座標 z を固定すれば, $k(z, q)$ は q について, $q = p$ でのみ極をもつ X 上の有理型関数である. $f \in C^1(\bar{G})$ に対して $\bar{\partial} f = f_{\bar{z}}\, d\bar{z}$ とすれば

$$f(q) = \int_{\partial G} f(p)\, \omega(p, q) - \int_G \bar{\partial} f(p) \wedge \omega(p, q)$$

が成り立つから性質 (I), (II) をもっている.

X 上の $(1,0)$-形式 $g(z)dz$ が各局所座標近傍 V と V における局所座標 z に対して $\int_V |g(z)|\cdot|dz\wedge d\bar{z}| < \infty$ をみたすとき，$g(z)dz$ はクラス $\mathcal{L}^1$ に属するということにする．

X 上のコムパクトな台をもつ測度 μ に対して，(1)の代りに

$$(2) \qquad T\mu(p) = \int \omega(p,q)\, d\mu(q)$$

を考える．$T\mu$ は X 上のクラス $\mathcal{L}^1$ の微分形式である．補題 1, 2 に対応して次の補題が得られる．

<u>補題 1'</u> $T\mu(p) = 0$ a.e. on $X \Rightarrow \mu = 0$.

<u>補題 2'</u> $\mu \perp H(K) \Leftrightarrow T\mu(p) = 0 \quad \forall p \in X \setminus K$.

h を X 上のコムパクトな台をもつ C^1 級関数とするとき，X 上の連続関数 f について $f \longrightarrow \int f h\, d\mu$ なる線形汎関数によって定まる測度を $h\mu$ で示すことにする．$T\mu \in \mathcal{L}^1$ より

$$(3) \qquad T(h\mu)(p) = \int h(q)\,\omega(p,q)\, d\mu(q) \qquad \text{a.e. on } X.$$

<u>補題 3'</u> $\{U_j\}$ は局所座標近傍による K の有限被覆とする．$\mu \perp H(K)$ に対し，各 U_j 内に台をもつ測度 $\mu_j \perp H(K)$ があって $\mu = \sum \mu_j$.

(証明) $\{U_j\}$ に対する 1 の分解を $\{h_j\}$ とし，$d\nu_j = \partial h_j \wedge T\mu$ によって定まる測度を ν_j とする．$\omega(p,q)$ の特異点の様子から，h_j に対して (3) をみたす点 p に対して $T\nu_j(p) = T(h_j\mu)(p) - h_j T\mu(p)$. $\mu_j = h_j\mu - \nu_j$ とおいて補題 1', 2' を用いる．

これから次の定理が得られる.

<u>定理2'</u> $f \in C(K)$ とする. K の任意の点 p に対して近傍 U_p が $f|(\bar{U}_p \cap K) \in H(\bar{U}_p \cap K)$ となるように選べるならば $f \in H(K)$.

<u>定理3'</u> ρ を X のある計量とする. $X \setminus K$ のすべての成分がある正数より小くない ρ-直径をもつなら(特に $X \setminus K$ が相対的コムパクトな成分をもたないとき) $H(K) = A(K)$.

<u>系</u> X 上正則な関数によって K 上一様近似される関数の全体を $H(K, X)$ とする. $X \setminus K$ が相対的コムパクトな成分をもたないときは $H(K, X) = A(K)$.

この系は Behnke-Stein の定理:

$X \setminus K$ が相対的コムパクトな成分をもたないときは $H(K, X) = H(K)$.

と定理3'とから出る. また

<u>定理1'</u> K の殆んどすべての点が $H(K)$ の peak point ならば $H(K) = C(K)$.

の証明は, 定理2'によって定理1に帰着される. これはまた補題1', 2'から直接証明することも出来る.

定理1', 2'は [7]. 定理2'を補題1'〜3'より証明することおよび定理2'の別証(後述)については [8].

§3. $\mathbb{C}^n$における積分表示

$\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ においては性質(I), (II) を同時にみたす核は存在しない。正則性を除けば Martinelli - Bochner の核([9]) は(I)(II) を充たしている。これから補題1の1つの拡張が得られる。また, この表示と, 後述の Hefer の定理とから導かれる Weil の積分表示(Weil 領域の場合)が知られている。こゝでは強擬凸領域に対する Henkin の核([10]) について述べる。

$\mathbb{C}^n$ のある領域で定義された C^1-級ベクトル値関数 $\eta(z)=(\eta_1(z),\cdots,\eta_n(z))$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ に対して

$$\omega(\eta)=d\eta_1\wedge d\eta_2\wedge\cdots\wedge d\eta_n$$

$$\omega'(\eta)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\eta_k\, d\eta_1\wedge\cdots\wedge d\eta_{k-1}\wedge d\eta_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\eta_n.$$

とおく。α が C^1-関数, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ が C^1-ベクトル値関数ならば $\omega'(\beta/\alpha)=\alpha^{-n}\omega'(\beta)$.

<u>Cauchy - Fantappié の公式</u>

G は $\mathbb{C}^n$ の有界領域で, ∂G は区分的に滑らかな面から成るとし, $\partial G\times G$ 上の C^1-級ベクトル値関数 $w(\zeta,z)$ が

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta,z)(\zeta_j-z_j)=1\ ,\quad \zeta\in\partial G,\ z\in G$$

をみたしているとする。$f\in A(\bar{G})$ に対して

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial G} f(\zeta)\,\omega'(w(\zeta,z))\wedge\omega(\zeta),\quad z\in G$$

$w_j(\zeta, z) = \bar{\zeta}_j / |\zeta - z|^2$ のときは，これは Martinelli - Bochner の公式に他ならない。一般の場合は，$\mathbb{C}^{2n}$ における多様体 $M: \sum_{k=1}^{n} w_k(\zeta_k - z_k) = 1$ を考えると，$\gamma = f(\zeta)\cdot\omega'(w)\wedge\omega(\zeta)$ は M 上の閉形式で，$\Gamma_0 = \{(\zeta, w(\zeta, z)) \in \mathbb{C}^{2n}, \zeta \in \partial G\}$ は M 上で $\Gamma_1 = \{(\zeta, (\bar{\zeta} - \bar{z})|\zeta - z|^{-2}) \in \mathbb{C}^{2n}, \zeta \in \partial G\}$ とホモトープであるから，Stokes の定理により，Martinelli - Bochner の公式に帰着するのである.

例えば $\mathbb{C}^n$ の超球 $B: |z|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 < 1$ を考える. このときは $w_j(\zeta, z) = \bar{\zeta}_j (1 - \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}_k z_k)^{-1}$ が上の条件をみたすから，$f \in A(B)$ に対して

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B} f(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta)}{(1 - \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}_k z_k)^n}, \quad z \in B$$

この時，核は $\zeta \in \partial B$ に対して z について B で正則である.

以下，強擬凸領域とは $\mathbb{C}^n$ の有界領域 D で C^3 級の境界をもち，$\bar{D}$ のある近傍で C^3 級の関数 ρ で ∂D の近傍で強多重劣調和，∂D 上で $\operatorname{grad}\rho \neq 0$ であるものによって，$D = \{z; \rho(z) < 0\}$ と表わされるものを指すことにする.

<u>定理 4</u> (Henkin [10]) D が強擬凸領域のとき，次の性質をもつ正数 δ と $\Phi(\zeta, z)$ が存在する.

(i) $\zeta \in \partial D$ に対して，$\Phi(\zeta, z)$ は z について $D_\rho = \{\rho < \delta\}$ において正則で，$\bar{D} \setminus \{\zeta\}$ で $\Phi(\zeta, z) \neq 0$.

(ii) $z \in D_\delta$ のとき，$\Phi(\zeta, z)$ は ζ について ∂D 上 C^1 級.

(iii) $\zeta \in \partial D$ のとき，z について D_δ で正則，$z \in D_\delta$ のとき ζ について ∂D 上 C^1 級の関数 $P_k(\zeta, z)$ $k=1\cdots n$ があって $\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(\zeta, z)(\zeta_k - z_k)$.

(iv) $f \in A(\bar{D})$ に対して

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{\omega'(P(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)^n}. \tag{5}$$

$\Phi(\zeta, z)$ は $\rho(z)$ から Hörmander の $\bar{\partial}$-問題の L^2 解を利用して構成される. (iii) は次の

<u>Hefer の定理</u> D が正則領域，f が D で正則ならば，$D \times D$ で正則な関数 $p_k(\zeta, z)$, $k=1\cdots n$，があって

$$f(\zeta) - f(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k(\zeta, z) \cdot (\zeta_k - z_k).$$

による. (iv) は Cauchy-Fantappiès の公式よりある. この核も $\zeta \in \partial D$ のとき z について D で正則である. (Ramirez [11] もこれと同等のものを得ているが構成法は異なる).

μ を K 上の測度，G は K を含む強擬凸領域とし，定理4における G に対応する関数を Φ_G, P_G とする. ∂G 上の $(n, n-1)$ 形式

$$T_G\mu(\zeta) = \int \frac{\omega'(P_G(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi_G(\zeta, z)^n} d\mu(z).$$

を考える. 補題2の拡張の1つの形として.

補題2″　Kは正則領域の共通部分とする.

［Kを含む任意の強擬凸領域Gと∂G上の任意の点ζに対して $T_G\mu(\zeta)=0$］ $\Longleftrightarrow$ $\mu \perp H(K)$.

これを用いる方法は今のところ成功していないので定理2について，別の方法を次に述べる.

§4.　$\bar\partial$-問題の有界な解と局所化定理

Xをn次元複素多様体，Kをそのコムパクト集合とし，H(K) A(K)の定義は§2と同様とする．座標近傍 V_j, $j=1\cdots N$ によるKの被覆と，V_j の局所座標 $z^{(j)}=(z_1^{(j)},\cdots z_n^{(j)})$ に対し，$\{(V_j, z^{(j)})\}_{j=1}^N$ を $\mathfrak{A}$ で表わす．Kを含む開集合Gで定義された C^∞ 級(0,1)形式 α は各 $V_j\cap G$ において

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k^{(j)}(z^{(j)})\,d\bar z_k^{(j)}$$

と書ける．Gの部分集合Sに対して，α のノルムを定義する.

$$\|\alpha\|_{S,\mathfrak{A}} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \sup_{S\cap V_j} |a_k^{(j)}(z^{(j)})|$$

定義　Xのコムパクト集合がクラス(δ)に属するとは，次の条件をみたす開集合の列 $\{D_m\}$ がとれることである.

(i) $D_m \supset \bar D_{m+1}$, $\bigcap_{m=1}^\infty D_m = K$.

(ii) 任意の $\mathfrak{A}=\{(V_j, z^{(j)})\}_{j=1}^N$ に対し，次の性質をみたす定数Cが存在する： $D_m \subset \bigcup_{j=1}^N V_j$ のとき，$C^\infty(\bar D_m)$ の(0,1)形式 α で $\bar\partial\alpha=0$ をみたすものに対して，$C^\infty(D_m)$ の関数 u が

あって，$\bar\partial u = \alpha$ かつ $\sup_{D_m} |u| \leq C \|\alpha\|_{D_m, \mathfrak{U}}$.

定理5（局所化定理）．Kがクラス(δ)のコムパクト集合のとき，Kの各点pに対して $f|_{(\bar U_p \cap K)} \in H(\bar U_p \cap K)$ をみたす近傍U_pが選べるなら，$f \in H(K)$.

（証明）$\mathfrak{U} = \{(V_j, z^{(j)})\}$ を固定し，$\{V_j\}$に対する単位の分解を$\{\varphi_j\}$とし，$C_1 = \sum_{j=1}^{N} \|\bar\partial \varphi_j\|_{(U_j V_j), \mathfrak{U}}$ とおく．任意の$\varepsilon > 0$に対して開集合$\Omega_j \supset \bar U_j \cap K$ と Ω_jで正則なf_jがあって $|f_j - f| < \varepsilon$. ($\bar U_j \cap K$).
$\Omega_j \cap \Omega_k$ で $h_{jk} = \varphi_j (f_j - f_k)$ とし，$h_k = \sum_{j=1}^{N} h_{jk}$ とおくと各Ω_kで$-\bar\partial h_k$に一致する(0,1)形式 $\alpha \in C^\infty(\bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j)$ ができる．開集合Gを十分Kに近くとれば $\|\alpha\|_{G, \mathfrak{U}} < 3C_1 \cdot \varepsilon$．Kがクラス($\delta$)に属するから $u \in C^\infty(G)$ があって $\bar\partial u = \alpha$ かつ，$\|u\|_G < 3C_1 \cdot C \cdot \varepsilon$ としてよい．各$\Omega_j \cap G$ で $F = h_j + u + f_j$ とおけばFはG全体で正則な関数で $|F - f| < 3(1 + C_1 \cdot C)\varepsilon$ だから $f \in H(K)$.

次にクラス(δ)の集合の例を述べる．

Xが開いたリーマン面の場合には$\bar\partial$-問題の解をBehnke-Steinの核で表示することにより，すべてのコムパクト集合がクラス(δ)に属することが知られる．このことは定理2′の別証明を与えたことになる．([8]).

$\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) の場合は$\bar\partial$-問題のL^2-解については領域が正則のときは $\|u\|_{L^2(G)} \leq 2d(G) \|\alpha\|_{L^2(G)}$ ($d(G)$はGの直径)の形で得られる．しかしL^∞ノルムについては簡単ではない．

強擬凸領域についての $\bar\partial$ 問題の解は次の定理で与えられる.

定理6（Henkin [13]） Dは $\mathbb{C}^n$ の強擬凸領域，α は $C^\infty(\bar D)$ の $(0,1)$ 形式で $\bar\partial\alpha=0$ をみたすとする. $\bar\partial u=\alpha$ かつ

(6) $$\|v\|_D \leq \gamma(D)\|\alpha\|_D$$

をみたす関数 $v\in C^\infty(D)$ が存在する. この v は

(7) $$v(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left\{\int_{\partial D\times[0,1]}\langle\alpha, d\bar\zeta\rangle\wedge\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta) -\int_D\frac{\langle\alpha,(\bar\zeta-\bar z)\rangle}{|\zeta-z|^2}\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\right\},$$

で与えられる. ここに η は $0\leq\lambda\leq 1$ に対し,

$$\eta_k=\lambda(\bar\zeta_k-\bar z_k)|\zeta-z|^{-2}+(1-\lambda)P_k(\zeta,z)\Phi(\zeta,z)^{-1}.$$

(7)式は Martinelli-Bochner の公式と定理4とから Stokes の定理を用いて得られ, 右辺を評価して (6) を得る. $\gamma(D)$ は Dの直径の他, Dを定義する関数 $\rho(z)$ の2階微分係数に依存している. (Ramirez の核を用いて得られる同等な結果は [14]).

コンパクト集合Kに対して, Kを含む開集合の列 $\{D_m\}$ が D_m が強擬凸領域の有限個の和集合で, 定理6の中の $\gamma(D_m)$ が有界であるように選べるなら, Kはクラス (δ) に属する. したがって, ∂K の近傍で強多重劣調和な関数 $\rho_0(z)$ があって, D_m が $\{\rho_0<\frac{1}{m}\}$ で表わされるなら. Kはクラス (δ) に属する.

例えば, $K=\bar D$ (D:強擬凸領域) のときは ρ_0 としてDを定義する関数をとればよいから, Kはクラス (δ) に属する.

また，MがC^∞級の有限またはコムパクトなtotal realな部分多様体であるときは，$\rho_0(z)=\mathrm{dist.}(z,M)^2$とおくと，$\rho_0$はMの近傍で強多重劣調和でM$=\{\rho_0=0\}$である（[15]）．したがって，Mはクラス（$\delta$）に属する．

§5. 強擬凸領域の近似定理

まず$\mathbb{C}^n$の有界な凸領域Dを考える．Dの1点z_0をとり，$f\in A(\bar{D})$に対して$f_\lambda(z)=f(z_0+\lambda(z-z_0))$とおくと，$\lambda<1$に対して$f_\lambda\in H(\bar{D})$．$\lambda\to1$のとき$\bar{D}$上一様に$f_\lambda\to f$であるから$A(\bar{D})=H(\bar{D})$．一般に

<u>定理7</u>（Henkin [16]，Lieb [12]）$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域Dに対して$A(\bar{D})=H(\bar{D})$．

Liebの証明は∂Dの境界上の各点に対し，その近傍Uを選んで$U\cap D$がある凸領域と正則同値である（例えばHenkin－Mitjagin [17]）ことを用い，定理5と同様な方法で$A(\bar{D})=H(\bar{D})$を示す．

Henkinの証明は定理4の応用として得られる次の定理を利用する．

<u>定理8</u>（[10]）Dは強擬凸領域とする．任意の$\delta>0$に対して直径がδより小さい部分S_iに∂Dを分割し，$f\in A(\bar{D})$を$g_j\in A(\bar{D})\cap H(\bar{D}\setminus S_j)$ $j=1\cdots N(\delta)$によって$f=\sum_{j=1}^{N(\delta)}g_j$と分解することが出来る．

$\delta > 0$ を十分小さくとり，S_j の1点 ζ_j に対して行列 $A(\zeta_j)$ を $\varepsilon > 0$ が十分小で $z \in S_j$ なら $z - \varepsilon A(\zeta_j) z \in D$ が成り立つように選ぶことが出来る．$g_{j,\varepsilon}(z) = g_j(z - \varepsilon A(\zeta_j) z)$ とおけば $g_{j,\varepsilon} \in H(\bar{D})$ で $g_{j,\varepsilon} \to g_j$ $(\varepsilon \to 0$，$\bar{D}$ 上一様）．$f_\varepsilon = \sum_j g_{j,\varepsilon}$ とおけば $f_\varepsilon \in H(\bar{D})$ で $\bar{D}$ 上一様に $f_\varepsilon \to f$．したがって $A(\bar{D}) = H(\bar{D})$．（Henkin はこの方法で強擬凸領域に対しては Hefer の定理が $A(\bar{D})$ について成立することを示している．）

なお，Henkin [18] は $\mathbb{C}^n$ の Weil 領域に対しても定理6が成立することを主張している．また Kerzman [19] では定理6が Stein 多様体の強擬凸領域について成立することが示されている．

引用文献

[1] Wermer J.: Banach Algebras and Analytic Functions, Advances in Math., Academic Press 1961.

[2] Bishop E.: A minimal boundary for function algebras, P. J. M. (1959), 629 — 642.

[3] Bishop E.: Subalgebras of functions on a Riemann surfaces, P. J. M. 8 (1958), 29 — 50

[4] Garnett J.: On a theorem of Mergelyan, P. J. M. 26 (1968) 461 — 467.

[5] Mergelyan S. N: Uniform approximation to functions of a complex variable, A M S Transl. Ser I vol 3 281 — 286.

[6] Behnke-Stein K : Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. 120 (1948) 430 — 461.

[7] Kodama L : Boundary measures of analytic differentials and uniform approximation on a Riemann surface, P. J. M. 15 (1965) 1261 — 1267.

[8] Sakai A : Localization theorem for holomorphic approximation on open Riemann surfaces (to appear)

[9] Bochner S. : Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, Ann. Math. 44 No 4 (1943) 652 — 673.

[10] Henkin G. M. : Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications, Eng. Transl. Math. of the USSR 1969, 7 (4) 597 — 616.

[11] Ramirez de A. E. : Ein Divisionsproblem in der komplexen Analysis mit einer Anwendung auf Randintegraldarstellungen, Math. Ann. 184 (1970) 172 — 187.

[12] Lieb I. : Ein Approximationssatz auf streng pseudokonvex Gebieten, Math. Ann. 184 (1969) 56 — 60.

[13] Henkin G. : Integral representations of functions in strongly pseudoconvex regions, and applications to the $\bar{\partial}$-problem. Mat. Sbornik, vol 82 (124) 2 (6) (1970) 300 — 308 (Russian)

[14] Lieb – Grauert : Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen, Rice Univ. Stud. vol 56, No. 2 (1970) 29–50

[15] Nirenberg R - Wells R.O. : Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans A.M.S. 142 (1969) 15–35

[16] Henkin G : Approximation of functions in pseudoconvex domains and the theorem of Z. L. Leibenson, Pol. Acad. Nauk. Ser. Mat. XIX No. 1 (1971) 37–42 (Russian)

[17] Henkin G. - Mityagin : Linear problem of complex analysis Uspehi XXVI 4 (160) (1971) 93–152 (Russian)

[18] Henkin G : Uniform estimates for solutions of the $\bar{\partial}$-problem in a Weil domain, Uspehi XXVI 3 (150) (1971) 211–212 (Russian)

[19] Kerzman N : Hölder and L^p-estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ in strongly pseudoconvex domains, Comm. pure and appl. math. vol XXIV (1971) 301–379.