数理解析研究所講究録
第144巻 1972年 60-74

Hartshorne-Griffiths 予想について

甲南大 応数 隅広秀康

§0 序

Xを代数的閉体k上で定義されたn次元non-singular projective variety, EをX上の階数rのベクトルバンドルとする. $r=1$のときには良く知られている様に$c_1=c_1(E)$をEの一次のChern classとすれば, c_1^k $(1\le k\le n)$がnumerically positiveであることがEのamplenessを特性付けています. 一般のrのときでもEがampleならばこの種の性質が成立するか? 又逆にこの種の性質がamplenessを特性付けるか? この問題は単にample vector bundlesについての興味だけでなく, 高次元代数的多様体を研究して行く上に, 例えば, Riemann-Rochの定理を使う時, 閉部分多様体の入り方等, 大切な問題となって来ます. しかしながら現在あまり多くの事柄は解っていないと思われます. 今後良く使われる記号を先ず列記しておきます.

記号 $c_i=c_i(E)$: Eのi次のChern class.

$I=(i_1,i_2,\dots,i_r)$: 負でない整数の組.

$|I|$: $|I| = i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r$ （I の norm.）

$c^I(E)$: $c^I(E) = c_1^{i_1} c_2^{i_2} \cdots c_r^{i_r}$

p : $p = k$ の標数.

$\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$: r 次元 vector space $\Omega^{\oplus r}$ （Ω : k の一つの万有体）の n 次元 quotient vector spaces （又は，$(r-n)$ 次元の $\Omega^{\oplus r}$ の subvector spaces）全体のなす Grassmann variety.

σ_a : Schubert condition $a = (a_1, a_2, \ldots a_{r-n})$ の Schubert cycle

$\sigma_p(A)$: A を $\Omega^{\oplus r}$ の a 次元 vector subspace とし，A と p 次元以上で交わる $(r-n)$ 次元の vector subspaces のなす p 次の special Schubert cycle.

即ち Schubert condition $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{r-n})$ において，

$a_1 = a-p+1,\ a_2 = a-p+2, \ldots, a_{p-1} = a-1,\ a_p = a,$

$a_{p+1} = n+p+1, \cdots, a_{r-n} = r$ としたものである.

Q : $\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$ の universal quotient vector bundle.

今迄に解っている主な事柄は，

(1) $p = 0$ のとき（Gieseker-Bloch [3]）: E を X 上の ample vector bundle とすると，各 $c_i = c_i(E)$ は numerically positive である.

(2) p が任意のとき（Gieseker [4]）: E を X 上の strongly ample vector bundle とすると，$|I| \leq \min(r, n)$ をみたす任意の

I に対して，$c^I(E)$ は numerically positive である．

我々は，ここでは，(2) の結果を Grassmannian geometry を利用して拡張出来ることを示しましょう．

定理　E を X 上の global sections で生成された ample vector bundle，I を $|I| \leq \min(n, r)$ をみたす I，このとき，$c^I(E)$ は numerically positive である．（p は任意．）

§1　Grassmannian geometry.

Grassmann variety (scheme), Schubert cycles, special Schubert cycles 等については，Hodge-Pedoe [6] 又は S. Kleiman [5] をみていただく事にします．

命題　X：k 上定義された $\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$ の d 次元 closed subvariety で，$Q|X$ が ample．
a：$0 < a < r$ である任意の整数．
→ 一般の a 次元 vector subspace A ($\subset \Omega^{\oplus r}$) に対して，$X \cap \sigma_a(A)$ は pure dimension $d - na$ である closed subset である．
(証明)　A を $\Omega^{\oplus r}$ の一般の a 次元 vector subspace とし，$\{e_1, \ldots, e_r\}$ を $\Omega^{\oplus r}$ の canonical base とする．$\{s_{ij}\}$ ($1 \leq i \leq a$, $1 \leq j \leq r$) を k

上 independent variables とし，　$f_i = \sum_{j=1}^{r} s_{ij} e_j$　$(1 \le i \le a)$ を A の一つの base とする．y を $X \cap \sigma_a(A)$ の任意の point とする．$\{e_1, \ldots, e_r\}$ の順序を適当に取り変えて，$y \in U = U_{12\ldots n}$ として良い．但し，
$U_{12\ldots n} = \{x \in \mathrm{Grassm}(\Omega^{\oplus r}) \mid x$ は $[e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} t_{i1} e_i, \ldots, e_r - \sum_{i=1}^{n} t_{i\,r-n} e_i]$ で生成される $\Omega^{\oplus r}$ の $(r-n)$ 次元 vector subspaces$\} \cong \Omega^{\oplus n(r-n)}$. このとき，$\sigma_a(A) \cap U \ni t = (t_{ij})$ は

$$s_{\ell i} + \sum_{j=1}^{r-n} s_{\ell\, j+n} t_{ij} = 0 \qquad (\ell = 1, 2 \ldots a\,;\ i = 1, 2 \ldots n)$$

で定義される．(cf. S. Kleiman [5])　$M = \{(\alpha, \beta) \mid 1 \le \alpha \le n, 1 \le \beta \le a\} \cup \{(0, a)\}$ に，次の様に辞書式順序を入れる．

$(n, a) > (n, a-1) > \cdots > (\alpha, \beta) > (\alpha, \beta-1) > \cdots > (\alpha, 1) > (\alpha-1, a) > \cdots$
$> (0, a)$．$(X \cap U)$ の closed subset $X_{(\alpha,\beta)}$ を次の様に定義する．

$$X_{(\alpha,\beta)} = \left\{ (t_{ij}) \in X \cap U \;\middle|\; \begin{array}{l} s_{\ell i} + \sum_{j=1}^{r-n} s_{\ell\, j+n} t_{ij} = 0 \\ (1,1) \le {}^{\forall}(i, \ell) \le (\alpha, \beta) \end{array} \right\}$$

即ち，

$$(\alpha, \beta) - 1 = \begin{cases} (\alpha-1, \beta) & \text{if } \beta = 1 \\ (\alpha, \beta-1) & \text{if } \beta \ne 1 \end{cases}$$

と定義するとき，

$$X_{(\alpha,\beta)} = X_{(\alpha,\beta)-1} \cap \left\{ (t_{ij}) \in X \cap U \;\middle|\; s_{\beta\alpha} + \sum_{j=1}^{r-n} s_{\beta\, j+n} t_{\alpha j} = 0 \right\}$$

$$X_{(n,a)} = X \cap \sigma_a(A) \cap U, \quad X_{(0,a)} = X \cap U$$

である．　$X_{(0,a)} \supset X_{(1,1)} \supset X_{(1,2)} \supset \cdots \supset X_{(\alpha,\beta)-1} \supset X_{(\alpha,\beta)} \supset \cdots$

$\cdots\supset X_{(n,\alpha)} = X\cap\sigma_\alpha(\beta)\cap U$. $k_{(\alpha,\beta)} = k_{(\alpha,\beta)-1}(s_{\beta j}\mid j=\alpha, n+1,\dots, r)$ とすると各 $X_{(\alpha,\beta)}$ は $k_{(\alpha,\beta)}$ 上定義されている。各 $X_{(\alpha,\beta)}$ が pure dimension $=\dim(X_{(\alpha,\beta)-1})-1$ であることが示せれば良い。その為に次の事が基本的である。$1\le{}^\forall\alpha\le n$ に対して、

$$\pi_\alpha : U\ni(t_{ij})\longmapsto(t_{\alpha j})\in\Omega^{\oplus(r-n)}\quad(1\le j\le r-n)$$

とすると π_α は $X\cap U$ 上の quasi-finite morphism である。なぜならば、$\{e_1,\dots,e_r\}$ を $P(\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r}), Q)$ の元とみるとき、$\{e_1,\dots,e_n\}$ は $Q|U\simeq\mathcal{O}_U^{\oplus n}$ なる同型を与えているから、特に $(X\cap U)$ 上で $\{e_1,\dots,e_n\}$ は、$Q|X\cap U\simeq\mathcal{O}_{X\cap U}^{\oplus n}$ なる同型を与えている。仮定より、$Q|X$ が ample であることより、$Q|X$ の tautological line bundle は ample. 故に、$L_{Q|X}$ ($Q|X$ の tautological line bundle) の global sections を利用しての $P(Q|X)$ から $\mathbb{P}^{N-1}(\Omega)$ への morphism φ は finite morphism である。

$$\begin{tikzcd}
(X\cap U)\times\mathbb{P}^{n-1} \arrow[r, hook, "\text{open immers.}"'] \arrow[d] & P(Q|X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathbb{P}^{N-1}(\Omega) \\
(X\cap U) \arrow[u, dashed, bend left, "\exists"] \arrow[r, hook, "\text{open immer.}"'] & X &
\end{tikzcd}$$

よって、$\varphi|(X\cap U)\times\mathbb{P}^{n-1}$ は quasi-finite. ${}^\forall((t_{ij})\times\xi)\in(X\cap U)\times\mathbb{P}^{n-1}$ に対して、

$$\varphi((t_{ij})\times\xi) = \left(\xi_1:\cdots:\xi_n:\sum_{i=1}^{n} t_{i1}\xi_i:\cdots:\sum_{i=1}^{n} t_{i\,r-n}\xi_i\right)$$

故に、$1\le{}^\forall\alpha\le n$ に対して、$\xi^\alpha=(0,0\cdots0,\underset{\alpha}{1},0\cdots0)$ とすると、

$$\varphi((t_{ij}) \times \mathfrak{Z}^{\alpha}) = (0 : \cdots : 0 : \overset{\alpha}{1} : 0 \cdots 0 : t_{\alpha 1} : \cdots : t_{\alpha\, r-n})$$

よって，$\pi_\alpha : X \cap U \ni (t_{ij}) \longmapsto (t_{\alpha j}) \in \Omega^{\oplus(r-n)}$ $(1 \leq j \leq r-n)$ は quasi-finite morphism である．

補題　$U = \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_N])$: N次元 affine space．（kは必ずしも代数的閉体であるとは限らない．）

X : Uのやくすな d次元 subscheme．

$s, s_1, \ldots, s_m$: k上の$(m+1)$個の independent variables．

$f = s_1 t_1 + \cdots + s_m t_m + f_1(t_{m+1}, \ldots, t_N)$: $f_1(t_{m+1}, \ldots, t_N)$は$k$係数の多項式．

$\pi : U = \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_N]) \to U' = \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_m])$ なる projection．

このとき，もし $\pi|X \to U'$が quasi-finite morphism ならば，$W = X \cap (f = s)$は pure dimension $(d-1)$のXの closed subscheme である．

（証明）Ω : kの universal domain．$L = k(s_1, \ldots, s_m)$．補題を示すためにはkは代数的閉体として良い．$X(\Omega)$（XのΩ-valued points）のL上の generic point を $y = (y_1, \ldots, y_N)$とし，$s' = f(y)$ $(\in L(y_1, \ldots, y_N))$とする．$d = 0$のときは明らかだから $d \geq 1$とする．s'がL上 algebraic ならば，$L(y_1, \ldots, y_N)$はL上 regular であるから，$s' \in L(y_1, \ldots, y_N)$．故に $\{s', s_1, \ldots, s_m, 1\}$は$k(y_1, \ldots, y_N)$上 linearly dependent．$k(y_1, \ldots, y_N)$と$L$は，

k 上 linearly disjoint であるから，$\{s', s_1, \cdots, s_m\}$ は k 上 linearly dependent. 故に，$s' = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_m a_m + a$ $(\exists a, \exists a_i \in k)$ 一方，$s' = s_1 y_1 + s_2 y_2 + \cdots + s_m y_m + f_1(y)$. 故に，

$$s_1(y_1 - a_1) + s_2(y_2 - a_2) + \cdots + s_m(y_m - a_m) + (f_1(y) - a) = 0.$$

$\{s_1, \ldots, s_m, 1\}$ は $k(y_1, \ldots, y_N)$ 上 linearly independent であることより，$y_i = a_i$ $(1 \leq i \leq m)$，$f_1(y) = a$. $\pi | X(\Omega)$ が quasi-finite より，$\dim X(\Omega) = d = 0$. $d \geq 1$ なることに反するから，s' は L 上 algebraically independent. 故に適当な $\sigma \in \mathrm{Aut}_L(\Omega)$ で $\sigma(s') = s$ をみたすものが存在する. 故に，

$$s = \sigma(s') = s_1 \sigma(y_1) + s_2 \sigma(y_2) + \cdots + s_m \sigma(y_m) + f_1(\sigma(y))$$

であるから，$\sigma(y) = (\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_N)) \in W$. よって，$d = \mathrm{tr}_L L(y_1, \ldots, y_N) = \mathrm{tr}_L L(\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_N)) = \mathrm{tr}_K L(\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_N)) + \mathrm{tr}_L K = \mathrm{tr}_K L(\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_N)) + 1$. (但し $K = L(s)$). 故に，W の各既約成分は K 上互いに共役であるから，W は pure dimension $= d-1$ の closed subscheme である.

命題の証明は，上の補題と (α, β) に関する帰納法で証明される.

次に，universal quotient vector bundle の各 Chern classes と Schubert cycles の関係を復習します.

命題 Q: $\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$ の universal quotient vector bundle. $1 \leq {}^{\forall} i \leq n$ に対して，

$c_i(Q) = \sigma_{n-i+1, n+2, \ldots, r} = \sigma_i(A)$

但し, $\dim A = (n-i+1)$.

証明は, S. Kleiman [5] 又は, 陽元 [7] を見て下さい.

§2 定理の証明.

X : k 上定義された n 次元 non-sing. projective variety.

E : X 上の rank $= r$ の global sections で生成された ample vector bundle

N : $N = \dim H^0(X, E)$

とする. このとき, 次の exact sequence が存在する.

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathcal{O}_X^{\oplus N} \xrightarrow{\varphi} E \to 0 \quad (\text{exact})$$

この exact sequence を利用して, 次の canonical morphism $\bar{\varphi}$ を定義出来る.

$$\bar{\varphi} : X \ni x \longmapsto \{E(x) \mid k(x)^{\oplus N} \to E(x) \to 0\}$$
$$\cap$$
$$\mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$$

Q を $\mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$ の universal quotient vector bundle とすれば, $E = \bar{\varphi}^*(Q)$ が成立する. E が ample vector bundle ~~[illegible]~~ であるから, $\bar{\varphi}$ は finite morphism であり, $X' = \mathrm{Im}\,\varphi$ of X とするとき, $Q|X'$ は ample vector bundle である. 又 $r > n$ のときは,

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus(r-n)} \to E \to {}^{\exists}E' \to 0 \quad (\text{exact})$$

を考えることより，定理を証明するには，$r \leq n$として良い．

<u>命題</u>　上述の条件で，$r \leq n$のとき，$c_r(E)$は numerically positive である．

(証明)．$\varphi : X \to Grass_r(\Omega^{\oplus N})$を canonical morphism とする．YをXの任意の次元rの closed subscheme (irreducible) とする．

$$\varphi_*(c_r(E)\cdot Y) = \varphi_*(\varphi^*(c_r(Q))\cdot Y) = c_r(Q)\cdot \varphi_*(Y).$$

Y'をYのφによる像とし，$l = \deg(\varphi / Y)$とすると，$\varphi_*(Y) = lY'$. 故に，$c_r(E)\cdot Y > 0$であることと，$c_r(Q)\cdot Y' > 0$であることは同値である．$Q/Y' = (Q/X')/Y'$は ample であるから，§1の命題より$c_1(A)\cdot Y' > 0$．(但し，Aは$\Omega^{\oplus N}$の一般な一次元 linear subspace.) 一方$c_1(A) = c_r(Q)$. 故に，$c_r(E)\cdot Y > 0$．故に$c_r(E)$は numerically positive である．

<u>命題</u>　前述の条件の下で，$1 \leq {}^\forall s \leq r$なる$s$に対して，$c_s(E)$は numerically positive である．

(証明)．$s < r$として良い．前の命題の証明と同様に次の事が示されれば良い．Yを$G = Grass_r(\Omega^{\oplus N})$の$s$次元 closed irreducible subvariety で，Q/Yが ample となるものとするとき，$c_s(Q)\cdot Y > 0$が示されれば良い．

$$0 \to R \to \mathcal{O}_G^{\oplus N} \to Q \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

R : universal subvector bundle.

故に，Y上で考えて，

$$0 \to R|Y \to \mathcal{O}_Y^{\oplus N} \xrightarrow{\alpha} Q|Y \to 0 \quad (\text{exact})$$

一方，$s<r$ より，$Q|Y$ は $H^0(Y, Q|Y)$ の $(r-s)$ 個の generic sections から生成される trivial subbundle をもつから，

$$0 \to \mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)} \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{\rho} \tilde{Q} \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$\tilde{Q} = Q/\mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)}, \quad \operatorname{rank} \tilde{Q} = s.$$

を得る．故に，

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)} \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "\delta"'] & \\
0 \arrow[r] & R|Y \arrow[r] & \mathcal{O}_Y^{\oplus N} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & Q|Y \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & & \tilde{Q} \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

である commutative diagram を得る．(但し，$\gamma = \rho\circ\alpha$)．$Q|Y$ が ample より $\tilde{Q}$ も又 ample で global sections で生成されている．γ に対応する canonical morphism $\bar{\gamma} : Y \to \mathrm{Grass}_s(\Omega^{\oplus N})$ を考えると，$\bar{\gamma}$ は finite morphism であり，$\tilde{Q} = \bar{\gamma}^*(Q')$，但し $Q' = \mathrm{Grass}_s(\Omega^{\oplus N})$ の universal quotient vector bundle．Y' を Y の $\bar{\gamma}$ による image とすると，$Q'|Y'$ は ample vector bundle．前の命題より，$c_s(Q')\cdot Y' > 0$ であるから，適当な

$\Omega^{\oplus N}$ の一次元 linear subspace A で $\sigma_1(A)$ と Y' とが proper に交わっているものが存在する．以下，適当な $\Omega^{\oplus N}$ の $(r-s+1)$ 次元の vector subspace B で，$\sigma_1(B) = c_s(Q)$ と Y とが proper に交わる物が存在することを示めそう．$H^0(Y, Q|Y)$ の $(r-s)$ 個の generic members によって定まる，$\mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)}$ から，$\mathcal{O}_Y^{\oplus N}$ への injection を δ とすると，$\alpha\circ\delta = i$．故に Y の任意の point y に対して，$\Omega^{\oplus N}$ の $(r-s)$ 次元 vector subspace W が存在し（W は y に depend しない）次の性質をみたす．$\forall y \in Y$ に対して，

(1) $\alpha(y): W \longrightarrow \Omega^{\oplus r}$ は injection.

(2) $\mathrm{Ker}(\beta(y)) = \alpha(y)(W)$.

このとき，$Y_0 = \{y \in Y \mid \mathrm{Ker}\,\gamma(y) \ni A\}$ とおく．$\sigma_1(A)$ と Y' とが proper に交わり，かつ，~~ことより~~ $\sigma_1(A)\cdot Y' > 0$ より，Y_0 は空でない有限集合．y_0 を Y_0 の任意の point として固定する．このとき $\alpha(y_0)(A) = 0$ として良い．$B = A\cdot\Omega \oplus W$ とすれば，$\dim B = 1+r-s$ であり これが求める B である．$Y_1 = \{y \in Y \mid \dim(B \cap \mathrm{Ker}\,\alpha(y)) \geq 1\}$ が空でない有限集合であることを示めす．B の定義より，$y_0 \in Y_1$．$\forall y \in Y_1$ に対して，$\mathrm{Ker}\,\alpha(y) \ni xA + w \neq 0$ $(x \in \Omega,\ w \in W)$ とすると，

$$0 = \alpha(y)(xA + w) = x\alpha(y)(A) + \alpha(y)(w)$$

$$0 = x\beta(y)(\alpha(y)(A)) + \beta(y)(\alpha(y)(w)) = x\gamma(y)(A).$$

$\gamma(y)(A) \neq 0$ ならば，$x = 0$ で，$w \in \mathrm{Ker}\,\alpha(y)$．これは矛盾．

故に，$\gamma(y)(A)=0$ で，$y\in Y_0$．故に $Y_1\subseteq Y_0$．

最後に，定理を証明する為に Schubert cycles の間の交わりの状態について復習しましょう．

Q : $Gras_r(\Omega^{\oplus N})$ の universal quotient vector bundle.

σ_a : Schubert condition $a=(a_1,\dots,a_{N-r})$ $(1\le a_1<a_2<\cdots<a_{N-r}\le N)$ の Schubert cycle.

c_i : Q の i 次の chern class.

<u>補題</u> (Pieri's formula). $\forall a=(a_1,\dots a_{N-r})$，$1\le\forall k\le r$ に対して，

$\sigma_a\cdot c_k=\sum_{\ell}\sigma_\ell$　但し，$\ell=(\ell_1,\dots,\ell_{N-r})$ は次の二つの条件をみたすすべての組を動く．

(1)　$1\le \ell_1\le a_1<\ell_2\le a_2<\cdots<a_{N-r}\le\ell_{N-r}\le N$

(2)　$\sum_{i=1}^{N-r}a_i-k=\sum_{i=1}^{N-r}\ell_i$

証明は Hodge-Pedoe [6] をみられたし．

<u>補題</u>　$I=(i_1,\dots,i_r)$ で $|I|=s\le r$ をみたすすべての I に対して，$c^I(Q)=c_1^{i_1}\cdots c_r^{i_r}=\alpha c_s+\sum_a d_a\sigma_a$　但し．$\alpha>0$，$d_a\ge0$ $|a|=a_1+\cdots+a_{N-r}=\frac{1}{2}(N-r)(N+r+1)-s$．

(証明)　$\mathcal{J}=\{I=(i_1,\dots,i_r)\mid |I|\le r\}$ の中に辞書式順序を入れる．この順序に関しての帰納法で示めす．$I=(0,0,\dots,1)$

に対しては自明. $I=(i_1,\dots,i_r)>(0,0,\dots,1)$ とし, k を $i_{k+1}=\cdots=i_r=0$, $i_k\neq 0$ となるものとする. $J=(i_1,\dots,i_k-1,0,\dots,0)$ とおくと $I>J$. 帰納法の仮定より,

$$c^J(a) = c_1^{i_1}\cdots c_k^{i_k-1} = \alpha' c_{s-k} + \sum_{\ell} \alpha'_\ell \sigma_\ell .$$

但し, $\alpha'>0$

$\alpha'_\ell \ge 0$

Pieri's formula より,

$$c_{s-k}\cdot c_k = \sigma_{r-(s-k)+1,\, r+2,\dots,N}\cdot c_k$$

$$= \sum_c \sigma_c$$

但し, $|c| = c_1+\cdots+c_{N-r} = r-(s-k)+1+(r+2)+\cdots+N-k$

$$1\le c_1\le r-s+k+1 \le c_2 \le r+2 < c_3 \le r+3 < \cdots < c_{N-r}\le N$$

故に, $c_3=r+3$, $c_4=r+4,\dots, c_{N-r}=N$. $c_2=r+2$ とすると, $c_1=r-s+1$. 故に, この $c=(c_1,\dots,c_{N-r})$ に対しては, $\sigma_c=c_s(a)$ であるから, $c_{s-k}\cdot c_k = c_s + \sum_{c,\,\sigma_c\neq c_s}\sigma_c$. 故に, $c^I(a)=c_1^{i_1}\cdots c_k^{i_k}$ $= c^J(a)\cdot c_k = \alpha'(c_{s-k}\cdot c_k)+\sum_\ell \alpha'_\ell\sigma_\ell\cdot c_k = \alpha c_s+\sum_a \alpha_a\sigma_a$.

但し, $\alpha>0$, $\alpha_a\ge 0$.

定理の証明. §2の条件の下で, $|I|\le \min(n,r)$ なる I に対して $c^I(E)$ が numerically positive であることを示す. $r\le n$ として良い. $|I|=s\le r$ とする. E の global sections を利用して X から $\mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$ への morphism を考えることにより, Y を

$Grass_r(\Omega^{\oplus N})$ の s 次元 closed subscheme で, $Q|Y$ が ample のとき, $c^I(Q)\cdot Y > 0$ を示せば良い. $c^I(Q) = \alpha c_s + \sum_a d_a \sigma_a$ ($\alpha > 0$, $\sigma_a \geq 0$). $c^I(Q)\cdot Y = \alpha(c_s\cdot Y) + \sum_a d_a(\sigma_a\cdot Y)$. c_s が numerically positive であることより, $c_s\cdot Y > 0$. 一方 $Grass_r(\Omega^{\oplus N})$ のすべての closed subvariety は正整数係数の Schubert cycles の和で示めせるから $\sigma_a\cdot Y \geq 0$. 故に, $c^I(Q)\cdot Y > 0$.

系. §2 の条件で, $r \leq n$ とする. このとき, E は trivial vector bundle を subbundle としてもたない.

(証明) $r = 1$ のときは自明. $r \geq 2$ とする. E がもし, trivial subbundle を持ったとし,

$$0 \longrightarrow O_X^{\oplus(r-s)} \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

とすれば, $C(E) = C(E')$. 故に $c_r(E) = 0$. これは定理に反する.

参 考 文 献.

(1) R. Hartshorne ; Ample Vector Bundle, Publ. math. I.H.E.S., NO. 29.

(2) P. Griffiths : Some transcendental methods in the study of algebraic cycles, Several complex variables II, Springer-Verlag, NO 185, 1970.

(3) S. Bloch and D. Gieseker ; The positivity of the Chern Classes of Ample Vector Bundle, Invent. math., Vol 12,

Fasc. 2, 1971.

[4] D. Gieseker : P-Ample Bundles and Their Chern Classes, Nagoya Jour, Vol 43, 1971.

[5] S. Kleiman ; Geometry on Grassmannians and Applications to Splitting Bundles and Smoothing Cycles, Pub. Math, I.H.E.S, NO 36.

[6] Hodge and Pedoe : Methods of Algebraic Geometry II, Cambridge Univ. Press, 1952.

[7] 隅広 : Very Ample Vector Bundles, 数理解析研究所講究録 116.