数理解析研究所講究録
第146巻 1972年 1-15

Bessel ポテンシャルについて

鈴鹿工専　樋口 功

§1. 序

R^nにおける次数αのRiesz核；$K_\alpha(x)=C_\alpha \cdot |x|^{\alpha-n}$ $(0<\alpha<n)$に対し $\mathfrak{F}_\alpha=\{K_{\frac{\alpha}{2}}*g(x)\,;\,g\in L^2(R^n)\}$ とおく。ノルム $\|K_{\frac{\alpha}{2}}*g\|_\alpha=\|g\|_{L^2}$ を導入すると，$L^2(R^n)$の完備性や合成定理等により，$\mathfrak{F}_\alpha$ が $C_0^\infty(R^n)$を稠密に含んだ完備な函数空間になることがわかる。また，$\hat{K}_\alpha(\xi)=C|\xi|^{-\alpha}$であるから，$^\forall u\in\mathfrak{F}_\alpha$ に対し，Fourier変換を用いてノルムは $\|u\|_\alpha^2=\int|\xi|^\alpha|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$ とも書ける。さらに，α次のエネルギー有限な正の測度の全体を$\mathcal{E}_\alpha^+(R^n)$ と書けば，$\{K_\alpha\mu_1(x)-K_\alpha\mu_2(x)\,;\,\mu_i\in\mathcal{E}_\alpha^+(R^n)\}$ は $\mathfrak{F}_\alpha$ で稠密である。

以上は H. Cartan や J. Deny の結果であるが，N. Aronszajn と K.T. Smith は[1]において，函数空間とその完備化の一般論を展開し，その立場から以上の結果を調べ直し，さらに[2]において，$C_0^\infty(R^n)$ をノルム$\|u\|_\alpha^2=\int(1+|\xi|^2)^\alpha|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$ で完備化した函数空間 $P^\alpha(R^n)$は次の式で定義される再生核$G_{2\alpha}(x-y)$ を持つことを示した。

$$G_{2\alpha}(x-y)=\frac{1}{2^{\frac{n+2\alpha-2}{2}}\cdot\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha)}K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(|x-y|)\,|x-y|^{\frac{2\alpha-n}{2}}。$$

K_ν が次数 ν の才三種(変形) Bessel 函数であることから，$G_{2\alpha}$ を核とするポテンシャルは Bessel ポテンシャルと呼ばれている。

以下に，Aronszajn - Smith [2] で得られた諸結果，とくに核 $G_{2\alpha}(x-y)$ の構成法を紹介し，それらの事実をもとに，R^n の領域 Ω 上の函数空間 $P^\alpha(\Omega)$ の核と次数 α および Ω の Green 函数 $G^{\Omega}_{2\alpha}(x,y)$ の間の関係について考察したい[4]。

§2. Bessel 核，Bessel ポテンシャルの性質

Aronszajn - Smith [2] の結果をまとめる。

[I] $G_{2\alpha}$ の性質

(a) $x\to 0$ および $|x|\to+\infty$ のときの $G_{2\alpha}(x)$ の order は

$$G_{2\alpha}(x)\sim C|x|^{2\alpha-n}\qquad(2\alpha<n\text{ のとき})$$

$x\to 0$ のとき $\qquad G_n(x)\sim C\log\frac{1}{|x|}$

$$G_{2\alpha}(x)\sim C\qquad(2\alpha>n\text{ のとき})$$

$|x|\to+\infty$ のとき　$G_{2\alpha}(x) \sim C|x|^{\frac{2\alpha-n-1}{2}} e^{-|x|}$

(b)　$G_{2\alpha}(x) \in L^1(R^n)$ で　$\hat{G}_{2\alpha}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$

(c)　合成定理が成り立つ：　$G_{\alpha+\beta}(x) = G_\alpha * G_\beta(x)$

［II］ 正の測度 μ に対し　$G_{2\alpha}\mu(x) = \int G_{2\alpha}(x-y)d\mu(y)$　を μ の次数 2α の Bessel ポテンシャルと呼び，2α ーエネルギー $\|\mu\|^2_{2\alpha} = \int G_{2\alpha}(x-y)d\mu(x)d\mu(y)$　が有限となる正の測度の全体を $E_{2\alpha}(R^n)$　とすると，次の条件は同値である。

(a)　$\mu \in E_{2\alpha}(R^n)$

(b)　$G_{2\alpha}\mu \in P^\alpha(R^n)$

(c)　$G_\alpha\mu \in L^2(R^n)$

さらに $\mu \in E_{2\alpha}(R^n)$ ならば $P^\alpha(R^n)$ の任意の元 u は μ ー可積で，$\int u\,d\mu = (u, G_{2\alpha}\mu)_\alpha$ が成り立つ。

［III］ 核 $G_{2\alpha}(x-y)$ に関する内，外容量を普通に定義すれば G.Choquet　の条件がみたされ，全ての解析集合は可容となる。

2α ー容量 0 なる集合の全体を $\mathfrak{A}_{2\alpha}$　で表わすと，$\mathfrak{A}_{2\alpha}$ の集合の Lebesgue 測度は 0 である。

性質 P が 2α－容量0の集合を除いて成り立つことを，
P exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ と書くことにすれば，

$$P^{\alpha}(R^n) = \{u\ ;\ \exists g \in L^2(R^n) \ni u(x) = G_\alpha g(x) \ \text{exc.}\ \mathfrak{A}_{2\alpha}\}$$

となる。

［IV］ $\{G_{2\alpha}\mu_1 - G_{2\alpha}\mu_2\ ;\ \mu_i \in E_{2\alpha}(R^n)\}$ は $P^{\alpha}(R^n)$ で稠密である。

Bessel 核の掃散可能性については，次の事が知られている。

［V］ $0 < \alpha \leqq 1$ のとき $G_{2\alpha}(x-y)$ は掃散原理をみたす。
すなわち，任意の正の測度 μ および任意の閉集合 F に対し，

$$G_{2\alpha}\mu'(x) = G_{2\alpha}\mu(x) \quad \text{on } F \ \text{exc.}\ \mathfrak{A}_{2\alpha}$$

$$G_{2\alpha}\mu'(x) \leqq G_{2\alpha}\mu(x) \quad \text{in } R^n$$

をみたす F 上の正の測度 μ' が存在する。[8]

§3. 領域上の函数空間

Ω を R^n の領域とする。 $C_0^\infty(\Omega)$ をノルム $\|\cdot\|_\alpha$ で完備化した函数空間 $P^{\alpha}(\Omega)$ の核はどうなるであろうか？
$P^{\alpha}(R^n)$ の核 $G_{2\alpha}$ との関係はどうだろうか？ 以下においてこの問題を考察する。

具体的に言うと，Ω 内に有界な台をもつ 2α－エネルギー

有限な正の測度の全体を $E_{2\alpha}(\Omega)$ とするとき，Riesz の定理により，$^{\forall}\mu\in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し

$$(\varphi, U_{2\alpha}^{\Omega}\mu)_{\alpha} = \int \varphi d\mu \qquad \text{for } {}^{\forall}\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$$

をみたす $P^{\alpha}(\Omega)$ の元 $U_{2\alpha}^{\Omega}\mu$（これを $P^{\alpha}(\Omega)$ 内での μ のポテンシャルと呼ぶことにする）が存在するが，このポテンシャル $U_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ の核について考察したい。

§4. Green 函数，α-調和函数

$0<\alpha\leqq 1$ のときは §2,[V] で述べたように $G_{2\alpha}(x-y)$ は掃散原理をみたすが，一応,一般に $\alpha>1$ の場合をも扱いたい。そこで Riesz 核 $|x-y|^{\alpha-n}$ に関し M. Ito [5] により導入された higher order の掃散および α-調和函数の理論を Bessel ポテンシャル論に持ち込む。

定理 1. $\alpha>0$ とし p を $0<\alpha-p\leqq 1$ なる正整数とするとき，有界な台をもつ任意の正の測度 μ および任意の閉集合 F に対し，次の式をみたす F 上の正の測度列 $\{\mu_i'\}_{i=0}^{p}$ が唯一組存在する。

$$G_{2\alpha}\mu(x) = \sum_{i=0}^{p} G_{2(\alpha-i)}\mu'_i(x) \qquad \text{on } F \text{ exc. } \mathfrak{A}_{2(\alpha-p)}$$

$$G_{2\alpha}\mu(x) \geqq \sum_{i=0}^{p} G_{2(\alpha-i)}\mu'_i(x) \qquad \text{in } R^n$$

$$G_{2q}\mu(x) = \sum_{i=0}^{q-1} G_{2(q-i)}\mu'_i(x) \qquad \text{on } F \text{ exc. } \mathfrak{A}_2$$

$$G_{2q}\mu(x) \geqq \sum_{i=0}^{q-1} G_{2(q-i)}\mu'_i(x) \qquad \text{in } R^n$$

但し q は $0<q\leqq p$ をみたす任意の整数である。

<u>定理 1′.</u>　定理 1 の条件のもとに，次の式をみたす F 上の正の測度列 $\{\mu''_i\}_{i=0}^{p}$ が唯一組存在する。

$$G_{2(\alpha-p)}\mu(x) = G_{2(\alpha-p)}\mu''_0(x) \qquad \text{on } F \text{ exc. } \mathfrak{A}_{2(\alpha-p)}$$

$$G_{2(\alpha-p)}\mu(x) \geqq G_{2(\alpha-p)}\mu''_0(x) \qquad \text{in } R^n$$

$$G_{2(\alpha-p+q)}\mu(x) = G_{2(\alpha-p+q)}\mu''_0(x) + \sum_{i=1}^{q} G_{2(q-i+1)}\mu''_i(x) \qquad \text{on } F \text{ exc. } \mathfrak{A}_2$$

$$G_{2(\alpha-p+q)}\mu(x) \geqq G_{2(\alpha-p+q)}\mu''_0(x) + \sum_{i=1}^{q} G_{2(q-i+1)}\mu''_i(x) \qquad \text{in } R^n$$

但し q は $1<q\leqq p$ をみたす任意の整数である。

以上二つの定理の証明は，合成定理による核の分解

$$G_{2\alpha} = G_{2(\alpha-p)} * G_2 * G_2 * \cdots * G_2$$

に基づくM.Ito［5］の方法がそのままここでも使える。

定義　Ωを領域とし単位測度ε_yの$C\Omega$上への，定理1の意味での掃散測度列を$\{(\varepsilon'_{y,C\Omega})_i\}_{i=0}^{p}$とするとき，

$$G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y) = G_{2\alpha}(x-y) - \sum_{i=0}^{p} G_{2(\alpha-i)}(\varepsilon'_{y,C\Omega})_i(x)$$

をΩの次数2αのGreen函数と呼ぶ。

注意 1.　$0<\alpha\leq 1$のとき$G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y) = G_{2\alpha}^{\Omega}(y,x)$となり，従って$G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)$は$y$の函数として可測である。　一般には$G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)$は対称とは限らないが，

$$G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y) = \int\cdots\int G_{2(\alpha-p)}^{\Omega}(x,z_1)\cdot G_2^{\Omega}(z_1,z_2)\cdot \cdots\cdot G_2^{\Omega}(z_p,y)\,dz_1 dz_2\cdots dz_p$$

と書ける。　但し$G_{2(\alpha-p)}^{\Omega}$，G_2^{Ω}は各々，次数$2(\alpha-p)$，次数2のGreen函数である。

注意 2.　有界な台をもつ任意の正の測度μに対し，

$$G_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) = \int G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)\,d\mu(y)\,,\qquad \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) = \int G_{2\alpha}^{\Omega}(y,x)\,d\mu(y)$$

とおくと，

$$\overset{\Omega}{G}_{2\alpha}\mu(x) = G_{2\alpha}\mu(x) - \sum_{i=0}^{p} G_{2(\alpha-i)}\mu_i'(x)$$

$$\overset{\vee\,\Omega}{G}_{2\alpha}\mu(x) = G_{2\alpha}\mu(x) - G_{2\alpha}\mu_0''(x) - \sum_{i=1}^{p} G_{2(p-i+1)}\mu_i''(x)$$

が成り立つ。但し $\{\mu_i'\}_{i=0}^{p}$, $\{\mu_i''\}_{i=0}^{p}$ は各々，μ の，定理1および定理1′の意味の掃散測度列（$C\Omega$ 上への）である。

§2，[I]，(b) により $\hat{G}_{2\alpha}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1+|\xi|)^{-\alpha}$ となるから，$T_{2\alpha} * G_{2\alpha} = \varepsilon_0$ なる超函数 $T_{2\alpha}$ （$\hat{T}_{2\alpha} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(1+|\xi|^2)^{\alpha}$）が存在する。　[5]にならって，Besselポテンシャル論における α-調和函数を次の様に定義する。

<u>定義</u>　次の条件をみたす函数 $u(x)$ は Ω 内で，Besselポテンシャル論の意味で，α-調和であるという。

(a) $u(x)$ は R^n 上 exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ で定義された局所可積分函数。

(b) $T_{2\alpha} * u$ が定義され，Ω 内で，超函数の意味で

$$T_{2\alpha} * u = 0$$

が成り立つ。

<u>補題 1.</u>　$\alpha > 0$ とし，p を $0 < \alpha - p \leq 1$ なる正整数とする。μ を総質量有限な正の測度とすれば，$0 \leq i \leq p$ なる任意の

整数に対し，ポテンシャル $G_{2(\alpha-i)}\mu(x)$ は Cs_μ で α－調和となる。

<u>注意</u>　この補題により，Green 函数 $G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)$ は $\Omega-\{x\}$ で α－調和であることがわかる。

§5．$0<\alpha\leqq 1$ の場合

<u>定理 2.</u>　Ω を R^n の領域とする。　$0<\alpha\leqq 1$ のとき，Ω の Green 函数 $G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)$ は函数空間 $P^\alpha(\Omega)$ の核となる。すなわち，任意の $\mu\in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し

$$U_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \quad in\ P^\alpha(\Omega)$$

となる。

<u>証明</u>　$\int e(x)dx=1$ かつ $e(x)=0$ for $|x|\geqq 1$ なる $e(x)\in C_0^\infty(R^n)$ に対し $e_\rho(x)=\rho^{-n}e(\frac{x}{\rho})$ とおく。　$\{\omega_n\}$ を Ω の exhaustion とすれば，$G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu\in P^\alpha(R^n)$ より

$$G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu * e_\rho(x) \in C_0^\infty(R^n)\cap P^\alpha(R^n)$$

また $\rho\to 0$ のとき，$G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu * e_\rho(x)\longrightarrow G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu$ in $P^\alpha(R^n)$ 。

一方，$G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu(x)=G_{2\alpha}\mu(x)-G_{2\alpha}\mu'_{C\omega_n}(x)=0$ on $C\omega_n$ exc. $\mathfrak{N}_{2\alpha}$ より，十分小なる ρ に対し，$G_{2\alpha}^{\omega_n}*e_\rho(x)\in P^\alpha(\Omega)$ となり，

従って $G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ となる。

$G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ を示す。 μ の $C\Omega$ および $C\omega_n$ 上への掃散測度を各々 $\mu'_{C\Omega}$, $\mu'_{C\omega_n}$ とすれば，$\{\mu'_{C\omega_n}\}$ は $E_{2\alpha}(R^n)$ で $\mu'_{C\Omega}$ に強収束する（［３］を参照）。 よって $P^{\alpha}(R^n)$ 内で $G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu \longrightarrow G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ となり，$G_{2\alpha}^{\omega_n}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ だから $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ となる。

次に，$^{\forall}\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ に対し

$$(\varphi,\ U_{2\alpha}^{\Omega}\mu)_{\alpha} = \int \varphi d\mu = \int \varphi d\mu - \int \varphi d\mu'_{C\Omega} = (\varphi,\ G_{2\alpha}^{\Omega}\mu)_{\alpha}$$

で，$P^{\alpha}(\Omega)$ の定義より $C_0^{\infty}(\Omega)$ は $P^{\alpha}(\Omega)$ で稠密だから

$$U_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \quad in\ P^{\alpha}(\Omega)$$

となる。

§６． 一般の場合

<u>補題２.</u> 任意の $\mu \in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し $U_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ が成り立てば，任意の $\mu \in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し $\check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ が成り立つ。

<u>証明</u> μ, ν を $E_{2\alpha}(\Omega)$ の任意の測度とする。 仮定より

$$\iint G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)\,d\nu(x)\,d\mu(y) = (U_{2\alpha}^{\Omega}\mu,\ U_{2\alpha}^{\Omega}\nu)_{\alpha}$$
$$= (U_{2\alpha}^{\Omega}\nu,\ U_{2\alpha}^{\Omega}\mu)_{\alpha}$$
$$= \iint G_{2\alpha}^{\Omega}(y,x)\,d\mu(y)\,d\nu(x)\ ,$$

従って

$$\int \left(G_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) - \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) \right) d\nu(x) = 0$$

で，νは任意だから， $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) = \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x)$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ となる。

<u>定理 3.</u> 次の三条件は同値である。

(a) Green 函数 $G_{2\alpha}^{\Omega}(x,y)$ が函数空間 $P^{\alpha}(\Omega)$ の核となるような有界領域 $\Omega\ (\neq \phi)$ が存在する。

(b) $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ かつ $P^{\alpha}(\Omega)$ の元として $\check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ が成り立つ有界領域 $\Omega(\neq\phi)$ と $E_{2\alpha}(\Omega)$ の測度 $\mu(\neq 0)$ が存在する。

(c) $0 < \alpha \leqq 1$ 。

<u>注意 1.</u> 定理2により，(a)又は(b)の条件をみたす領域が一つ存在すれば，実は全ての領域がこの条件をみたすことがわかる。 また“有界”という条件を“$C\Omega$ の Lebesgue 測度が正”という条件に置き換えることもできる。

注意 2. M. Ito は [7] において超函数 $T_{2\alpha}$ の性質を調べ，(b)内の条件 " $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu = \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ " は $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ から導かれることを示してくれた。

定理3の証明 (c) $\Longrightarrow$ (a)は定理2で，(a) $\Longrightarrow$ (b) は補題2ですでに示してあるので，(b) $\Longrightarrow$ (c) を示せば十分である。

先ず $1 < \alpha < 2$（すなわち $p = 1$）として矛盾を導く。

(b)から

$$G_{2\alpha}\mu - G_{2\alpha}\mu_0' - G_{2(\alpha-1)}\mu_1' = G_{2\alpha}\mu - G_{2\alpha}\mu_0'' - G_2\mu_1''$$

となり補題1により $G_2\mu_1''$ は Ω で α-調和となる。ゆえに

$$T_{2(\alpha-1)} * \mu_1'' = T_{2\alpha} * G_2\mu_1'' = 0 \quad \text{in } \Omega \text{。}$$

一方， $\hat{T}_{2(\alpha-1)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(1+|\xi|^2)^{\alpha-1}$ だから $1 < \alpha < 2$ のとき，負型函数に関する Levy - Khintchine の定理により次の条件をみたす，$R^n - \{0\}$ の対称な正の測度 σ が存在する。

(1) $(1+|\xi|^2)^{\alpha-1} = 1 + \int_{|y|>0} (1 - e^{i\xi\cdot y})\, d\sigma(y)$ ，

(2) 任意の $r > 0$ に対し

$$\int_{|y|>r} d\sigma(y) < +\infty \quad \text{かつ} \quad \int_{0<|y|<r} |y|^2 d\sigma(y) < +\infty \text{。}$$

(1), (2) から，任意の $\delta>0$ に対し

$$\int_{|y|<\delta}|y|^2 d\sigma(y)>0$$

が従う。　なぜなら，$\int_{|y|<\delta_0}|y|^2 d\sigma(y)=0$ となる $\delta_0>0$ が存在したとすると，(2) により $\int_{|y|>0} d\sigma(y)<+\infty$ となり，(1) から $(1+|\xi|^2)^{\alpha-1}$ が有界となってしまうからである。

さて，$T_{2(\alpha-1)}*\mu_1''=0$ in Ω だから，任意の $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$0=T_{2(\alpha-1)}*\mu_1''(\varphi)=\mu_1''*\varphi(0)+\int(\mu_1''*\varphi(0)-\mu_1''*\varphi(y))d\sigma(y)$$

となり $\int\mu_1''*\varphi(y)d\sigma(y)=0$ が成り立つ。　ところが，任意の $\delta>0$ に対し $\int_{|y|<\delta}|y|^2 d\sigma(y)>0$ であったから，φ を適当に選べば $\int\mu_1''*\varphi(y)d\sigma(y)\neq 0$ と出来るので矛盾である。

最後に $\alpha\geqq 2$ として矛盾を導く。

(b) により

$$G_{2\alpha}\mu-G_{2\alpha}\mu_0''-\sum_{i=1}^{p}G_{2(p-i+1)}\mu_i''\in P^\alpha(\Omega)\subset P^2(\Omega)$$

従って

$$G_2*\left(\sum_{i=1}^{p-1}G_{2(p-i)}\mu_i''+\mu_p''\right)\in P^2(\Omega)$$

となる。　§2，[II]，(C) により

$$\sum_{i=1}^{p-1}G_{2(p-i)}\mu_i''+\mu_p''\in L^2(R^n)$$

となるが，μ_p'' は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の測度であるから矛盾である。

注意　M. Ito は［6］において，以上の結果を一般の regular functional space での話に拡張し，次の結果を得た。

定理（M. Ito［6］）　X を locally compact, σ-compact な Hausdorff space, ξ を X 上の稠密な測度とする。　H を X，ξ に関する regular な functional space，H_Ω を開集合 Ω 上の functional space とすると，次の条件は同値である。

(a) 任意の開集合 Ω に対し，H_Ω が正の核をもつ

(b) H が掃散原理をみたす。

これによると，$\alpha>1$ の場合，$P^\alpha(\Omega)$ は正の核をもたなくなるわけで，事情がむつかしくなり，筆者には $P^\alpha(\Omega)$ の核について何もわかっていない。

参考文献

[1] N. Aronszajn — K. T. Smith : Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier, 6 (1956)

[2] —————————— : Theory of Bessel potentials, Part 1, Ann. Inst. Fourier, 11 (1961)

[3] B. Fuglede : On the theory of potentials in locally compact spaces, Acta Math., 103 (1960)

[4] I. Higuchi : On the Bessel Kernel for a Domain (to appear)

[5] M. Ito : Etude des potentiels d'ordre α et des fonctions α-harmoniques, Inventiones Math., 8 (1969)

[6] : Une caractérisation du principe du balayage pour un espace fonctionnel régulier, (à paraître)

[7] : Remarque sur les espaces fonctionnels au noyau bessélien, (à paraître)

[8] M. Kishi : Positive kernels and potentials, Lecture note, Nagoya Univ., (1970 ~ 1971)