数理解析研究所講究録
第146巻 1972年 127-141

EXISTENCE OF VARIOUS BOUNDED SOLUTIONS OF BIHARMONIC EQUATIONS

名大 理　中井 三留

§1. 分類問題

次元 $m \geq 2$ の非完閉連結 C^∞ Riemann 多様体 M を考える．その計量テンソルを g_{ij}，又 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$，$g=\det(g_{ij})$ とかくと，局所座標 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ により Laplace-Beltrami 作用素 Δ は

(1) $$\Delta\cdot=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{g(x)}\,g^{ij}(x)\frac{\partial\cdot}{\partial x^j}\right)$$

と表される．調和方程式

(2) $$\Delta u=0$$

の M 上の解の作る函数空間を $H(M)=H^1(M)$ を考える．又函数に対する種々の有界性 X を考える．代表的なものとしては，函数値の有界性を意味する B，正値性を意味する P，Dirichlet 積分 $D_M(u)$ の有限性を意味する D，又これらの性質の組合せとして BD 等を考える．こゝに $D_M(u)$ は

$$(3)\qquad D_M(u)=\int_M du\wedge *du=\int_M\sum_{i,j=1}^{m}g^{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}dx,$$

但し $dx=\sqrt{g(x)}\,dx^1dx^2\cdots dx^m$ で与えられる．$HX(M)$ を性質 X をもつ調和函数からなる $H(M)$ の部分空間とし，$HX(M)=\mathbb{R}$（実数体）となる M の全体を O_{HX} と表す．又調和グリーン函数 $G_M(x,y)$ が存在しないと言ういわゆる放物型の M の全体を O_G とかく．調和分類問題とは，族 $O_\cdot$ の特性及び各族の相互関係を明白にすることを目的とし，Sario，Ahlfors 等多くの函数論関係の人々により研究され，例えば

$$(4)\qquad \phi=O_H<O_G<O_{HP}<O_{HB}<O_{HD}=O_{HBD}$$

等が一つの結論である（詳しくは例えば Sario-Nakai [11] 参照）．こゝに $<$ は $\subsetneqq$ の意味である．

方程式 (2) の代りに

$$(5)\qquad \Delta u=Pu\ ,\quad P\geq 0,\ P\not\equiv 0$$

を考える．P は例えば（局所）Hölder 連続とする．解空間 $P(M)$ 及びその部分空間 $PX(M)$ を考える．X としては更に，いわゆる P-エネルギー積分

$$(6)\qquad E_M^P(u)=D_M(u)+\int_M P(x)[u(x)]^2dx$$

が有限であると言う性質 E も考える．$PX(M)=\{0\}$ となる M と P の組 (M,P) の全体を O_X，又 M が（調和）放物型

となる組 (M, P) の全体を O_G と前の記号の意味を拡大解しやくし，やはり (5) に関する分類問題を同様に論じうる．これはBrelot, Ozawa 等多くの人々により研究され

$$(7) \qquad \phi = O_{\mathcal{P}} < O_G < O_B < O_D = O_{BD} < O_E = O_{BE}$$

が得られている（詳しくは Nakai [2] 参照）．

同一思想のもとで分類問題を，双調和方程式

$$(8) \qquad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$$

について論じたらどうなるであろうかを Sario と筆者が去年から少し調べ始めた．(8) の解空間を $H^2(M)$ 又その部分空間 $H^2X(M)$ と記し，$H^2X(M) = H^1X(M)$ となる M 全体を O_{H^2X} と記す．良く知られている様に

$$(9) \qquad O_{H^2} = \phi$$

である．問題は，いつ $M \in O_{H^2X}$ となるか，又 O_{H^2X} 相互の関係はどうであるを明かにすることである．調べたのは $X = B, D, BD$ の場合だけであるが様子は (4), (7) とはずい分異る．X としては，函数 u に対する有界性 Y 及び Δu に対する有界性 Z_Δ を併せて課する $X = YZ_\Delta$ を取る方が更に自然であろうが，手始めとして $X = B, D, BD$ の場合を考えた．

Ω を常に M のなめらかな境界をもつ相対完閉な部分領域と

する　方程式(8)は Poisson 方程式の族

(9)　　$\Delta u = h,\quad h \in H^1(M)$

と同等であるから，(9)の解空間を $H_h(M)$ と記すと，いわゆる reduction relation

(10)　　$$H^2X(M) = \bigcup_{h \in H^1(M)} H_hX(M)$$

となり，$M \in \mathcal{O}_{H^2X}$ はすべての $h \in H^1(M)-\{0\}$ に対して $H_hX(M) = \emptyset$ となることゝ同等である．だから単一の Poisson 方程式

(11)　　$\Delta u = \varphi,$

φ は例えば Hölder 連続，が性質 X をもつ解をいつ持つかを調べることが先決となる．(11)の $\bar{\Omega}$ 上の解 u は

(12)　　$$u(x) = H_u^{\Omega}(x) - \int_{\Omega} G_{\Omega}(x,y)\varphi(y)dy$$

だから本質的な部分は Green ポテンシャル $G_\Omega\varphi$ の研究である．(5)の $\bar{\Omega}$ 上の解 u についても同様に

(13)　　$$u(x) = H_u^{\Omega}(x) - \int_{\Omega} G_{\Omega}(x,y)u(y)P(y)dy$$

だから事情は同じである．この意味で方程式(5)，(8)の分類問題は「(1)の分類問題」＋「Green ポテンシャル論」と言える．たゞし(5)の場合，(13)は大てい極限移向可能で Ω は M

であきかえうるが，(11) の場合（例え H_u^{Ω} が H_u^M に収束しても）$\int_M G_M(x,y)\varphi(y)dy$ が存在せぬ方がむしろ普通である（Nakai-Sario [4]）これが困難な点であり (7) と類似な関係がもはや (8) について期待できぬ一つの理由である.

§2. Virtanen現象

表(4) の $O_{HD}=O_{HBD}$ は Virtanen [12] が発見したもので Virtanen 現象と呼ばれている：Dirichlet 積分有限な解があると必ず有界かつ Dirichlet 積分有限な解がある. (5) について Virtanen 現象がやはり成立することは筆者の最近の結果である（[2]）. これより弱い結論 $O_E=O_{BE}$ は久しく知られていた（Ozawa [9], Royden [10], Glasner-Katz [1]）. (8) についても Virtanen 現象が起るか否か，即ち $O_{H^2D}=O_{H^2BD}$ かどうかに視点を置く. 結論は

(14) $$O_{H^2D} < O_{H^2BD}$$

である（Nakai-Sario [5]）実はもっと強く

(15) $$O_{H^2B} \not\subset O_{H^2D}, \quad O_{H^2D} \not\subset O_{H^2B}$$

もわかる（Nakai-Sario [7]）. 以下いかにしてこのことがわかるかを説明する.

§3. Dirichlet 有限解

$G_\Omega\varphi$ は Green ポテンシャル $\int_\Omega G_\Omega(\cdot, y)\varphi(y)dy$，$G_\Omega(\varphi, \varphi)$ は φ の Green エネルギー $\int_{\Omega\times\Omega} G_\Omega(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$ を意味するとする．φ が Ω 上 Hölder 連続とすると，時、は，Evans 関係と呼ばれる

$$(16) \qquad D_\Omega(G_\Omega\varphi) = G_\Omega(\varphi, \varphi)$$

が成立する．これを基礎とすると

<u>LEMMA</u> 3.1　方程式 (11) が Dirichlet 積分有限な解をもつための必要十分條件は

$$(17) \qquad \sup_{\Omega\subset M} G_\Omega(\varphi, \varphi) < \infty$$

完閉な台をもち Dirichlet 積分が有限な連続函数の族を $C_0D(M)$ と記すと

<u>LEMMA</u> 3.2. 條件 (17) は次の條件と同等である

$$(18) \qquad \sup_{\psi\in C_cD(M)-\{0\}} \left(\int_M \varphi(x)\psi(x)\right)^2 / D_M(\psi) < \infty.$$

これら２つの初等的な事実に基づき簡単な２つの例を考えよう　複素平面 $\mathbb{C}$ に Riemann 計量

(19) $$ds = (1+|z|)^{-\alpha}|dz|$$

を与えた Riemann 多様体を $\mathbb{C}_\alpha$ と表す．すると（Nakai [3]）

THEOREM 3.1. $\mathbb{C}_\alpha \in O_{H^2D} \Longleftrightarrow \alpha \leq 3/2$.

次に単位円板 $|z|<1$ を $\mathbb{D}$ とし，Riemann 計量

(20) $$ds = (1-|z|)^{-\alpha}|dz|$$

を与えたものを $\mathbb{D}_\alpha$ とかく．すると（Nakai-Sario [6], O'Malla [8]）

THEOREM 3.2. $\mathbb{D}_\alpha \in O_{H^2D} \Longleftrightarrow \alpha \geq 3/4$.

すべての α に対し $\mathbb{C}_\alpha \in O_G$，$\mathbb{D}_\alpha \notin O_G$ であるから上記之定理より直ちに

(21) $$O_G \not\subset O_{H^2D}, \quad O_{H^2D} \not\subset O_G.$$

即ち $M \in O_{H^2D}$ は M の境界の調和的な強さと何のかゝわりも持たぬ．$\mathbb{C}_2 \notin O_{H^2D}$ 故ある $h \in H^1(M)-\{0\}$ に対し

$$u = \lim_{\Omega \to \mathbb{C}} G_\Omega h$$

は (8) の Dirichlet 有限解となる．しかし $G_\Omega \nearrow \infty$ である．これは大変面白いことだと思う．u はてきとうな核の

ポテンシャルになっているだろうか.

§4. 有界解

前節の類似を有界解について考える. 補題3.1に対応してほとんど自明ながら

LEMMA 4.1. 方程式(11)が有界解をもつ必要十分な條件は

$$(22)\qquad \sup_{\Omega\subset M}\left(\sup_{x\in\Omega}\left|G_\Omega\varphi(x)\right|\right)<\infty.$$

條件(17)より(18)の方が計算しやすいことが多い. 事実 $\mathbb{C}_\alpha$, $\mathbb{D}_\alpha$ についてそうである. 所が(22)と同等な(18)型の條件はありそうもない. わずかに

LEMMA 4.2 條件(22)から次の條件が従う:

$$(23)\qquad \sup_{\psi\in C_0^2(M)-\{0\}}\left|\int_M \varphi(x)\psi(x)\,dx\right|\Big/\int_M|\Delta\psi(x)|\,dx<\infty.$$

多くの場合そうである様に有界性はDirichlet有限性よりずっと難しく, 今の場合も例外でない. $\mathbb{C}_\alpha$, $\mathbb{D}_\alpha\in O_{H^2B}$ の決定すら出来ていなくて, たゞある α_0 があって,

(24) $\alpha < 1 \Rightarrow \mathbb{C}_\alpha \in O_{H^2B}$, $\alpha > \alpha_0 (\geq 1) \Rightarrow \mathbb{C}_\alpha \notin O_{H^2B}$

となること，及び

(25) $\alpha \geq 2 \Rightarrow \mathbb{D}_\alpha \in O_{H^2B}$, $\alpha < 1 \Rightarrow \mathbb{D}_\alpha \notin O_{H^2B}$

がわかった．だからとにかく

(26) $$O_G \not\subset O_{H^2B}, \quad O_{H^2B} \not\subset O_G$$

でやはり $M \in O_{H^2B}$ は M の理想境界の調和的な強さと何のかゝわりもないことになる．

§5. Riemann 面の double.

S を Riemann 面，γ を理想境界の一部で (S, γ) が analytic boundary $\gamma \neq \emptyset$ をもつ bordered surface となるものとする．γ は完用であってもなくてもよい．$\hat{S}$ を S の γ に関する double とし，j を $\hat{S}$ の involution とする．$h \in H(\hat{S})$ が antisymmetric とは $h(j(z)) = -h(z)$，又非負の $\hat{S}$ 上の 2 次微分 $\mu(z)dxdy \not\equiv 0$ が symmetric とは，$\zeta = \xi + i\eta = j(z)$, $z = x + iy$ とするとき $\mu(\zeta)d\xi d\eta = \mu(z)dxdy$ となることであるとする．以上の様な h と μ に対し方程式

(27) $$\Delta u(z) = \mu(z) h(z), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ \mu \in C^\infty$$

を考える．(27) が有界 (又は Dirichlet 有限) な解をもつ様な

hの全体を$H_\mu^B(\hat{S})$（又は$H_\mu^D(\hat{S})$）とかく　Sはanalytic boundary $\gamma \neq \phi$をもつから$\hat{S} \in O_G$か否かにかかわらずS上Green函数$G_S(z,\zeta)$をもつ　§§3-4と同様にして

<u>LEMMA</u> 5.1　$\mu(z)dxdy$の台上$h>0$とする．すると$h \in H_\mu^B(\hat{S})$又は$h \in H_\mu^D(\hat{S})$となる必要十分條件は

$$(28) \qquad \sup_{z\in S} \int_S G_S(z,\zeta)h(\zeta)\mu(\zeta)\,d\xi d\eta < \infty$$

又は

$$(29) \quad \int_{S\times S} G_S(z,\zeta)h(z)h(\zeta)\mu(z)\mu(\zeta)\,dxdy\,d\xi d\eta < \infty.$$

$0 \notin H_\mu^B(\hat{S})$としておく．一般に$R$をRiemann面とするとき，次の関係に注意する：$X = B$又はDとして

$$(30) \quad (\mathbb{R}\cdot H_\mu^X(R) + \mathbb{R}\cdot H_\mu^X(R)) - \{0\} \subset H_\mu^X(R);$$

$$(31) \qquad \bigcap_{j=1}^{n} H_{\mu_j}^X(R) \subset H_{\sum_{j=1}^n \mu_j}^X(R);$$

$$(32) \qquad H_\mu^X(R) \subset H_\mu^X(R') \quad (R' \subset R)$$

我々の目的は(14)又は更に一般な(15)を示すにある．明かに$O_{H^2D} \subset O_{H^2BD}$であるし，§§3-4から$O_{H^2D} \not\subset O_{H^2B}$

だから $O_{H^2B} - O_{H^2D}$ に入る M の例を作ればよい．

§6 Counter example

$\mathbb{P}$を右半平面，虚軸を$\partial\mathbb{P}$とする．基礎の空間を

(33) $$\mathbb{C}' = \mathbb{C} - \{-3, 3\}$$

とする．これはもちろん放物型の面である．$\mathbb{P}' = \mathbb{P} - \{3\}$ とおけば，$\partial\mathbb{P} = \partial\mathbb{P}'$ に関する double の意味で

(34) $$\mathbb{C} = \hat{\mathbb{P}}, \quad \mathbb{C}' = \hat{\mathbb{P}}'$$

であって補題 5.1 が使える状況である．時には，上半平面 $\mathbb{S}$ をとり

(35) $\mathbb{C} = \hat{\mathbb{S}}$ ($\partial\mathbb{S}$に関し)，$\mathbb{C}' = \hat{\mathbb{S}}$ ($\partial\mathbb{S} - \{-3,3\}$に関し)

と見た方が好都合なこともある．

最初に $\mathbb{C}$ 上正値回転不変な函数で C^∞ な μ_1（又は同じことながら $\mathbb{C}$ 上の微分 $\mu_1(z)dxdy$）で $\mu_1 | \{|z| \leq 4\} = 1$ かつ $\{|z| \geq 5\}$ 上

(36) $$\mu_1(z) = (1+|z|)^{-(3+\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

となるものを考える．

次に $\mathbb{C}$ 上やはり非負回転不変 C^∞ 函数 φ で $|z| < 1/2$ 内に台をもち $z = 0$ の近傍で $\varphi \equiv 1$ となるものをとる．正数からなる減小列 $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ で $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$ となるもの及びすべての

$n=1,2,\ \cdots$ に対し

$$\eta_1>6,\quad \varepsilon_n(\eta_n-1)>1,\quad (\eta_n+1)^2<\eta_{n+1}+1$$

となる数列 $\{\eta_n\}_1^\infty$ をとり函数

(37) $$\mu_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\varphi(z-i\eta_n)$$

を考える．i は虚数単位とする．

更に $\mathbb{C}'$ 上非負 C^∞ 函数で点3に関し回転不変な μ_3 で $\mathbb{C}'$ 内 $|z-3|\geq 1/2$ 上 $\mu_3\equiv 0$ かつ $0<|z-3|\leq 1/4$ では

(38) $$\mu_3(z)=(|z-3|\log|z-3|)^{-2}$$

となるものをえらび，μ_4 は $\mathbb{C}'$ 上の函数で虚軸に関し μ_3 と対称なものとする．

最后に

(39) $$\lambda(z)=\mu_1(z)+\mu_2(z)+\mu_3(z)+\mu_4(z)$$

を考えると，これは $\mathbb{C}'$ 上真に正値 C^∞ 函数で $\partial\mathbb{P}$ に関して symmetric である．

$\mathbb{C}'$ に Riemann 計量 $\lambda(z)|dz|^2$ を与えて得られる Riemann 多様体 $M=(\mathbb{C}',\lambda(z)|dz|^2)$ が求めるものである：

(40) $$M\in O_{H^2B}-O_{H^2D}.$$

証明は大変長くかゝる．$c(z)=x$，$s(z)=y$ とおくと，

a) $c, s \in H^D_{\mu_1}(\mathbb{C}) \subset H^D_{\mu_1}(\mathbb{C}')$;

b) $c \in H^D_{\mu_2}(\mathbb{C}) \subset H^D_{\mu_2}(\mathbb{C}')$, $s \notin H^D_{\mu_2}(\mathbb{C}')$;

c) $c \in H^D_{\mu_3+\mu_4}(\mathbb{C}')$;

d) $h \in H^D_\lambda(0<|z-3|4) \Rightarrow h \in H(|z-3|<4)$;

e) $H^D_\lambda(\mathbb{C}') = \{\alpha c \,;\, \alpha \in \mathbb{R}-\{0\}\}$

の5段階をへてまず $M \notin O_{H^2D}$ がわかる．§§3-5 の補題をくりかえし使う．ついで

f) $h \in H^B_\lambda(\mathbb{C}') \Rightarrow h \in H(\mathbb{C})$ かつ $h(3) = h(-3) = 0$;

g) $h \in H^B_\lambda(\mathbb{C}') \Rightarrow h = \alpha \cdot c \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

h) $H^B_\lambda(\mathbb{C}') = \phi$

の手つづきの末，$M \in O_{H^2B}$ がわかって証明が終る．

文　献

[1] M. Glasner - R. Katz : On the behavior of solutions of $\Delta u = Pu$ at the Royden boundary. J. d'Analyse Math. 22 (1969), 343-354.

[2] M. Nakai : Dirichlet finite solutions of $\Delta u = Pu$, and classification of Riemann surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 77

(1971), 381-385.

[3] M Nakai : Dirichlet finite biharmonic functions on the plane with distorted metrics (to appear)

[4] M Nakai-L Sario . Dirichlet finite biharmonic functions with Dirichlet finite Laplacians. Math. Z. 122(1971), 203-216

[5] M. Nakai-L Sario : Existence of bounded Dirichlet finite biharmonic functions. Ann Acad Sci Fenn. (to appear)

[6] M Nakai-L. Sario : Existence of Dirichlet finite biharmonic functions (to appear)

[7] M. Nakai-L. Sario : Existence of bounded biharmonic functions. (to appear)

[8] H O'Malla : Dirichlet finite biharmonic functions on the unit disk with distorted metrics Proc Amer Math. Soc. (to appear)

[9] M. Ozawa: Classification of Riemann surfaces, Kôdai Math. Sem. Rep. 4 (1952), 63-76.

[10] H. Royden: The equation $\Delta u = Pu$ and the classification of open Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. 271 (1959).

[11] L. Sario - M. Nakai: Classification Theory of Riemann Surfaces. Springer-Verlag, 1970.

[12] K. Virtanen: Über die Existenz von beschränkten harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fenn. 75 (1950).