数理解析研究所講究録
第147巻 1972年 31-36

シンボリック・ダイナミクス

阪大・基礎工　釜江哲朗

確率測度空間 (X, ν) (i.e. ν は X 上の測度，$\nu(X)=1$) とその上の保測変換 ψ の組 (X, ψ, ν) を <u>metrical system</u> と呼ぶ。但し，ν が定義される X の σー部分集合体はとくに表示されないが，わかっているものとする。metrical system (X, ψ, ν) と (X', ψ', ν') が<u>同型</u>であるというのは，測度空間 (X, ν) から (X', ν') への同型写像 ϕ で，ほとんどすべての α (w.r.t. ν) に対して $\phi\circ\psi(\alpha)=\psi'\circ\phi(\alpha)$ を満たすものが存在することをいう。metrical system (X, ψ, ν) が<u>エルゴード的</u>であるというのは，ψ が測度空間 (X, ν) 上のエルゴード変換であることをいう。よく知られているように，(X, ψ, ν) がエルゴード的であるための必要十分条件は，X 上の ψー不変な確率測度 μ, λ と実数 $0<p<1$ に対して，もし $\nu = p\mu + (1-p)\lambda$ ならば $\nu=\mu=\lambda$ となることである。

$\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots$ を勝手なコンパクトな距離空間とする。直積位相が定義された直積空間 $\prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ を考える。 $W = W(\Sigma) = \prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ と記す。 W の元 α の第 i 成分 $(i=1,2,\cdots)$ を $\pi_i(\alpha)$ と記す。 W 上の shift を $T = T_\Sigma$ と記す。 すなわち，$\alpha \in W$ に対して，$T\alpha \in W$ は $\pi_i(T\alpha) = \pi_{i+1}(\alpha)$ でもって定義される。 T は W 上の連続変換である。 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ とする。 W 上で定義された実数値連続関数の全体に，$\|f\| = \max_{\alpha \in W} |f(\alpha)|$ でもってノルムを入れた位相ベクトル空間を $C(W)$ と記す。 $C(W)$ は可算な base をもつ。 σ^* を $C(W)$ の可算な base とする。 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{ki}\alpha)$ がどんな $f \in \sigma^*$ に対しても存在するような $\alpha \in W$ と $k \in N$ に対しては，どんな $f \in C(W)$ に対しても

$$\int_W f \, d\mu_\alpha^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{ki}\alpha)$$

となるような W 上の確率 Borel 測度 μ_α^k が唯一つ存在する（[1]）。 しかも μ_α^k は T^k-不変である（[1]）。 $\mu_\alpha = \mu_\alpha^1$ と記す。 上の関係から容易にわかるように，もし μ_α^k が存在するなら，どんな $i \in N$ に対しても $\mu_{T^i\alpha}^k$ が存在し且 $\mu_{T^i\alpha}^k = \mu_\alpha^k \circ T^{-i}$ となる。 また，もし μ_α^k が存在するなら，μ_α も存在し，

$$\mu_\alpha = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu^k_{T^i\alpha} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu^k_\alpha \circ T^{-i}$$

となる。 $W(\Sigma)$ の元 α と $k\in N$ に対して，$W(\Sigma^k)$ の元 $\phi_k(\alpha)$ を

$$\pi_i(\phi_k(\alpha)) = (\pi_{k(i-1)+1}(\alpha), \pi_{k(i-1)+2}(\alpha), \cdots, \pi_{ki}(\alpha)) \in \Sigma^k$$

でもって定義する。 ϕ_k は $W(\Sigma)$ から $W(\Sigma^k)$ の上への同相写像で $\phi_k \circ T^k_\Sigma = T_{\Sigma^k} \circ \phi_k$ を満たす． それ故，μ^k_α が存在することは $\mu_{\phi_k(\alpha)}$ が存在することと同値で且つそのような場合 $\mu_{\phi_k(\alpha)} = \mu^k_\alpha \circ \phi_k^{-1}$ となる。 すなわち，metrical system $(W(\Sigma), T^k_\Sigma, \mu^k_\alpha)$ は metrical system $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ と同型となる。

さて，どんな T-不変な確率 Borel 測度 μ に対しても，W の元 α が存在して，$\mu = \mu_\alpha$ となることが知られている([2])。それでは，metrical system (W, T, μ_α) の諸性質が α の中にどのように反映されるだろうか？ これに関する一つの結果を報告する([3])。

<u>定義</u> μ_α が存在するような W の元 α が <u>regionally uniform</u> であるというのは，どんな $f\in C(W)$ と実数 $\varepsilon > 0$ に対しても

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(\left\{j\in N;\ \left|\frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{j+n} f(T^i\alpha) - \int_W f\,d\mu_\alpha\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

が成立することをいう。 但し，Nの部分集合Sに対して，$\delta(S) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_S(i)$，また，$\chi_S(i)$ は $i\in S$ のとき1，$i\notin S$ のとき0。

<u>補題</u>（[1]の(4.2)） metrical system (W, T, μ_α) がエルゴディクであるための必要十分条件は，α が regionally uniform であることである。 但し，$\alpha\in W$。

<u>定理</u> $\alpha\in W$，$k\in N$ とせよ。 metrical system (W, T^k, μ_α) がエルゴディクであるための必要十分条件は，以下が満たされることである。

(1) $\varphi_k(\alpha)$ は regionally uniform。

(2) $\mu_\alpha^k = \mu_\alpha$

（証明） まず，μ_α^k が存在し且つ $\mu_\alpha^k \neq \mu_\alpha$ と仮定しよう。このとき，

$$\mu_\alpha = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu_\alpha^k \circ T^{-i}$$

で且つ μ_α^k は T^k −不変だから，(W, T^k, μ_α) はエルゴディ

クでない。次に，μ_α^k が存在しないと仮定しよう。このとき，任意の $n\in N$ に対して $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{ki}\alpha)\right| \leqq \|f\|$ だから，増大列 $j_n \uparrow \infty$ が存在し，$\frac{1}{j_n}\sum_{i=1}^{j_n} f(T^{ki}\alpha)$ が $\int_W f\,d\mu_\alpha$ と異なる値に収束するように出来る。$\mathcal{O}^*$ は可算集合だから，j_n の部分列 $j_n' \uparrow \infty$ で次のようなものをとることが出来る。すなわち，任意の $g\in\mathcal{O}^*$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{j_n'}\sum_{i=1}^{j_n'} f(T^{ki}\alpha)$ が存在する。さて，このとき，W上の確率Borel測度λが存在して，

$$\int_W g\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{j_n'}\sum_{i=1}^{j_n'} g(T^{ki}\alpha)$$

が任意の $g\in C(W)$ に対して成立する（[1]）。このようなλは T^k ー不変な測度で且つ $\mu_\alpha = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda\circ T^{-i}$ が成り立つことが容易にわかる。$\int f\,d\lambda \neq \int f\,d\mu_\alpha$ だから $\lambda\neq\mu_\alpha$。故に，この場合にも (W, T^k, μ_α) はエルゴード的でない。以上より，もし (W, T^k, μ_α) がエルゴード的ならば，(2) が満たされることが示された。このような場合 (1) も満たされることを示そう。μ_α^k が存在するのだから，$\mu_{\phi_k(\alpha)}$ も存在し且つ $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ は (W, T^k, μ_α^k) と同型になる。$\mu_\alpha^k = \mu_\alpha$ だから，$(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ はエルゴード的となり，補題より (1) が成立する。逆に，(1) (2) が満たされたとしよう。このとき，(W, T^k, μ_α)

は $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ と同型となり，補題より，エルゴード的となる。

<u>系</u>　$(W(\Sigma), T_\Sigma, \mu_\alpha)$ が弱混合的なら，$(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ も弱混合的となる。　但し，$\alpha \in W(\Sigma)$，$k \in N$。

（証明）　$(W(\Sigma), T_\Sigma, \mu_\alpha)$ が弱混合的なら，$(W(\Sigma), T_\Sigma^k, \mu_\alpha)$ はエルゴード的であって，定理より，$\mu_\alpha^k = \mu_\alpha$ となる。　更に，$(W(\Sigma), T_\Sigma^k, \mu_\alpha)$，従って，$(W(\Sigma), T_\Sigma^k, \mu_\alpha^k)$，従って $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ は弱混合的となる。

［文　献］

[1] J. C. Oxtoby, Ergodic sets, <u>Bull. Amer. Math. Soc.</u> 58 (1952), 116-136.

[2] Teturo Kamae, Representation of shift invariant measures by sequences, <u>Proc. Japan Acad.</u> (to appear)

[3] Teturo Kamae, On the ergodicity of T^k, where T is the shift on a sequence space, <u>Proc. Japan Acad.</u> (to appear)