数理解析研究所講究録
第 147 巻 1972 年 111-129

Non-Singular Transformation と von-Neumann Algebra

九大 理 浜地敏弘
〃 教養 押川元重

§0. 序

non-singular transformation と von-Neumann algebra (factor) の関係は、古く von-Neumann [13][14] によって示されているが、この報告では von-Neumann 及びその後、他の人達によってなされた non-singular transformation の研究(特に不変測度の存在問題). von-Neumann algebra (factor) の同型問題等の研究についてみられる両者の間の対応関係を紹介するのが目的である。

§1. ergodic non-singular transformation とその type

§2. factor とその type

§3. ergodic non-singular transformation (group) から構成される factor

§4. non-singular transformation に対する不変測度の

存在問題

§5. 不変測度の存在条件と von-Neumann alg. (factor) の各クラスの特徴づけとの間に見られる類似性

§6. 変換群の弱同型と von-Neumann alg. (factor) の同型

§7. Ⅲ型

§1. ergodic non-singular transformation とその type.

測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ 上に定義された 1-1 onto invertible measurable transformation T が

(1) $m(E)=0 \rightleftarrows m(TE)=0 \quad (E \in \mathcal{B})$

をみたすとき non-singular であるといい

(2) $E = TE \Longrightarrow m(E)=0$ or $m(E^c)=0$

をみたすとき ergodic であるという。

我々は ergodic non-singular transformation (e.n.s.t.) T を次の5つの型に分類しよう。

(1) T が type $\mathrm{I}_n \rightleftarrows$ m が atomic measure で n ケの点にだけ mass をのせている。

(2) 〃 $\mathrm{I}_\infty \rightleftarrows$ m が atomic measure で無限可算ケの点にだけ mass をのせている。

(3) 〃 $\mathrm{II}_1 \rightleftarrows$ non-atomic measure m とたがいに絶対連続T不変有限測度が存在。

(4) 〃 II_∞ ⇄ non-atomic mと互いに絶対連続T不変σ-有限(total massは無限)測度が存在

(5) 〃 III ⇄ non-atomic mと互いに絶対連続σ-有限不変測度が存在しない。

エルゴード的ならば、互いに絶対連続な不変測度は存在すれば、定数倍を除いて一意であるからすべてのe.n.s.t.は5つの型のいづれかに属する。尚、作用するe.n.s.t.Tを一般の変換群$\mathcal{G}$としても同様のことがいえる。

§2. factorとそのtype.

Hilbert sp. $\mathfrak{H}$のbdd. operators全体$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$のあるsubalgebra Mが

(1) $*$-operationについて閉じている、即ち $A\in M \Rightarrow A^*\in M$

(2) $M=M''$ (但し、M'はMと可換なbdd. op.の全体、$M''=(M')'$)

をみたせば、それはvon-Neumann algebra (W^*-alg.)といい、

(3) center $M\cap M'$が単位元で張られている

ならば、W^*-alg.はfactorであるという。

$\mathfrak{H}$のclosed subspace $\mathfrak{M}$に対し、$\mathfrak{M}$へのprojection op.を$P_{\mathfrak{M}}$で表わす。$P_{\mathfrak{M}}\in M$をみたすclosed subsp.'sの集合の中に次の同値関係を入れる。

$\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ ⇄ $^{\exists}A$; partially isometry $\in M$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$,

は A の initial set , final set.

Closed subsp $\mathfrak{M}$ がその subsp. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ に対して、$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ をみたせば実は $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ であるとき、$\mathfrak{M}$ は finite subsp. と呼びそうでないとき infinite subsp. と呼ぶ。

von-Neumann は[13]で、factor M に対して $P_{\mathfrak{M}} \in M$ をみたす closed subsp. $\mathfrak{M}$ の集合の上で定義され次の(1)～(4)をみたす実数値関数 (Relative dimension ft.) $D_M(\cdot)$ の存在と一意性を示した。

(1) $0 \leqq D_M(\mathfrak{M}) \leqq \infty \quad \forall \mathfrak{M} ; P_{\mathfrak{M}} \in M.$

(2) $D_M((0)) = 0$, $0 < D_M(\mathfrak{M}) < \infty$ if $\mathfrak{M}$; finite $\neq (0)$

$D_M(\mathfrak{M}) = \infty$ if $\mathfrak{M}$; infinite

(3) $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N} \Rightarrow D_M(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) = D_M(\mathfrak{M}) + D_M(\mathfrak{N})$

(4) $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \Rightarrow D_M(\mathfrak{M}) = D_M(\mathfrak{N})$

更に、Relative dimension ft. の値域をみてすべての factor は次の5つのいずれかの型に分類されることを示した。

(1)	M が type	I_n	$\rightleftarrows$	Range of D_M =	$\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \cdots, n\varepsilon\}$	$n \geqq 1$, $\varepsilon > 0$
(2)	〃	I_∞	$\rightleftarrows$	〃	$\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \cdots \infty\}$	$\varepsilon > 0$
(3)		II_1	$\rightleftarrows$	〃	$[0, \varepsilon]$	$\varepsilon > 0$
(4)		II_∞	$\rightleftarrows$	〃	$[0, \infty]$	
(5)		III	$\rightleftarrows$	〃	$\{0, \infty\}$	

$\mathfrak{H}$ が finite ならば I_n or II_1 , infinite なら I_∞ or II_∞ , finite subsp. が存在しないとき III 型。

§3. ergodic non-singular transformation (group) から構成される factor.

von-Neumann は各 factor の例を与える為に e. n. s. t.(*) から factor を作る一般的な構成法を与へ[14]、更に各 factor の type を invariant measure の存在で特徴づけた。今このことを以下に示すと、T を e. n. s. t. on $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ とする。$\Omega\times Z$ 上の可測関数から作られる hilbert sp. $\mathfrak{H}_T$

$$\mathfrak{H}_T \equiv \left\{F(x,n) \;\middle|\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int |F(x,n)|^2\, dm(x) < \infty\right\}$$

$$\ni F, G \qquad (F\,|\,G) \equiv \sum_{-\infty<n<\infty}\int F(x,n)\,\overline{G(x,n)}\,dm(x)$$

$\mathfrak{H}_T$ 上の unitary operator U

$$UF(x,n) \equiv \sqrt{\frac{dmT}{dm}(x)}\cdot F(Tx,\, n+1) \qquad \text{但し、} mT(E) = m(TE)$$

$\mathcal{L}^\infty(\Omega)\ni\varphi$ に対し bounded operator L_φ on $\mathfrak{H}_T$

$$L_\varphi F(x,n) \equiv \varphi(x)F(x,n).$$

$I = \{U^n, L_\varphi \mid -\infty<n<\infty,\ \varphi\in\mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$ から生成される W^*-alg. を $R(I)=M_T$ とすると T がエルゴード的であることから M_T が factor になる。

定理 (von-Neumann [14]). M_T が I_n 型 $\rightleftarrows$ T が I_n 型.

M が I_∞ 型	$\rightleftarrows$	T が I_∞ 型	
〃 II_1 型	$\rightleftarrows$	〃 II_1 型	
〃 II_∞ 型	$\rightleftarrows$	〃 II_∞ 型	
〃 III 型	$\rightleftarrows$	〃 III 型	

(*) もっと一般の可換群 G (可算かつ free [14]) で云へている。

§4. non-singular transformation に対する不変測度の存在問題

エルゴード理論の方で n.s.t.（必ずしも ergodic であるとは限らない）に対する不変測度の存在問題を最初に手がけたのは E. Hopf [8] だが、その後存在条件も明らかになり存在しない例（III型）も知られるようになって現在では一応の結論が得られている。その存在条件の代表的なものに Hopf [8] の boundedness、Hajian-Kakutani [5] の weakly wandering set による特徴づけがある。

T; n.s.t. on $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ 。$E, F \in \mathcal{B}$ に対して E の分割 $\{E_i\}_{i\geq 1}$ F の分割 $\{F_i\}_{i\geq 1}$ と整数列 $\{n_i\}_{i\geq 1}$ がとれて $T^{n_i}E_i = F_i \ \forall i \geq 1$ をみたすとき E は F と同値（$E \sim F$）であるという。 E がもし、$E \supset F$ でかつ $E \sim F$ をみたせば実は $E \sim F$ であるとき E を bounded set，そうでないとき unbounded set という。 E に対して整数列 $\{n_i\}_{i\geq 1}$ が定まって，$T^{n_i}E \cap T^{n_j}E = \phi \ (i \neq j)$ をみたすとき E を weakly wandering set と呼び特に $n_i = i$ のとき wandering set と呼ぶ。

存在条件

(1) 互いに絶対連続な有限不変測度が存在

$$\rightleftarrows \ \Omega \text{ が bounded set （E. Hopf）}$$

(2) 〃 $\rightleftarrows$ weakly wandering set は存在しない。

(Hajian - Kakutani)

§5. 不変測度の存在条件と factor の各クラスの特徴づけとの間に見られる類似性

5-1. 比較可能

$\mathfrak{H}$; Hilbert sp. M; $\mathfrak{H}$ 上の factor。 $P_{\mathfrak{M}} \in M$ をみたす closed subsp. の間の順序関係 $\leqq$ を次で定義する。

$$\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N} \quad \rightleftarrows \quad \mathfrak{N} \supset {}^{\exists}\mathfrak{N}'; \text{closed subsp.}, \ \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}'$$

T; e. n. s. t. on $(\Omega, \mathcal{B}, m)$。 Ω 上の n. s. t. S で

$$\forall \omega \in \Omega, \ {}^{\exists}n \ni \quad S\omega = T^n\omega$$

をみたす S の全体 (group をなす) を T の full group といい $[T]$ で表わす。 可測集合の間に次の順序関係を定義する。

$$E \leqq F \quad \rightleftarrows \quad {}^{\exists}S \in [T], \ SE \subseteqq F$$

§4 で同値関係 $\sim$ を定義したが実は

$$E \sim F \quad \rightleftarrows \quad {}^{\exists}S \in [T] \quad SE = F$$

であることが容易に分かる。

次の性質は良く知られていることである。

性質 (比較可能) (1) $E \leqq F$ かつ $F \leqq E \Rightarrow E \sim F$

(2) $\forall E, \forall F$, に対し, $E \leqq F$ or $F \leqq E$

(1)′ $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}$ かつ $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$

(2)′ $\forall \mathfrak{M}\ \forall \mathfrak{N}$ に対して，$\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}$ or $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{M}$

5-2. bounded set と finite space.

von-Neumann の結果から

$$\mathfrak{H} : \text{finite sp.} \rightleftarrows M : \mathrm{II}_1 \ (\text{or } \mathrm{I}_n)$$

であるが，今特に M を e.n.s. t T から作られた factor M_T とする。次の５つの命題はすべて同値である。

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_T \text{ ; finite space} \arrow[r, shift left, "(1)"] \arrow[d, shift right, "(5)'"'] & M_T \text{ ; type } \mathrm{II}_1 (\text{or } \mathrm{I}_n) \arrow[l, shift left, "(1)'"] \arrow[d, shift right, "(3)'"'] \\
\Omega \text{ ; bounded set} \arrow[u, shift right, dashed, "(5)"'] \arrow[r, shift left, "(2)"] & T \text{ ; type } \mathrm{II}_1 (\text{or } \mathrm{I}_n) \arrow[l, shift left, "(2)'"] \arrow[u, shift right, "(3)"'] \arrow[d, shift right, "(4)'"'] \\
& \text{weakly wandering set は存在しない.} \arrow[u, shift right, "(4)"']
\end{tikzcd}$$

(1) (1)′ は von-Neumann [14] ((1)′ は trivial)

(2) (2)′ E. Hopf [8] ((2)′ 〃)

(3) (3)′ von-Neumann [14] ((3)′ 〃)

(4) (4)′ Hajian-Kakutani [5] ((4)′ 〃)

bounded set と finite space は定義からして類似性があるので (5) (5)′ の直接証明を与えることは意義があるが報告者は (5) の証明が分からない。

(5)′ の証明； Ω を unbounded set とせよ。このとき weakly wandering set が存在するから ((4), (2)′ の間接証明からも分かるがその直接証明も与えることが出来る [4] [16]) それを

Eとする。 $T^{n_i}E \cap T^{n_j}E = \phi$ $(i \neq j)$ 。 $\mathfrak{H}_T$ の closed subsp. $\mathfrak{M}(E)$ を次で与える。

$$\mathfrak{M}(E) \equiv \{ F \in \mathfrak{H}_T \mid \{ w \in \Omega \mid F(w, n) \neq 0 \} \subset E \quad \forall n \}$$

このとき $P_{\mathfrak{M}(E)} \in M$ ([14]), $U^{n_i}\mathfrak{M}(E) \perp U^{n_j}\mathfrak{M}(E)_{i \neq j}$ $U^{n_i}\mathfrak{M}(E) \sim U^{n_j}\mathfrak{M}(E)$ 。 即ちたがいに同値で直交する closed subsp.'s の列が存在するから $\mathfrak{H}_T$ は infinite space。

E. Hopf の証明 (2) についての注意; (2)の証明で Hopf は incompressible measure を構成し, Ω が bounded のとき それは m とたがいに絶対連続不変有限測度であることを示した。その証明は分かりにくく boundedness の必要性も理解し難い欠点がある。 そこで Neumann の factor から relative dimension ft. を構成する ((1) の証明) のに用いたユークリッドの互除法のアイデアで、boundedness の条件の下で同値(たがいに絶対連続) 有限不変測度を構成することが出来る[15]。 この方法だと boundedness の必要性が分かりやすい。 但しエルゴード性と仮定しないので 5-1 の性質 (比較可能) が使へず、そこが Neumann の方法と異なる。

§6. 変換群の弱同型と factor の同型

$\mathfrak{G}$ を可算 ergodic non-singular transformation group と

する。n.t.Sで

$$\tilde{\forall}\omega\in\Omega,\ \exists g_i\in\mathfrak{G}\ \ni\ S\omega=g_i\omega$$

をみたすSの全体(group)を$\mathfrak{G}$のfull groupといい$[\mathfrak{G}]$で表わす。二つの変換群$(\Omega_1,\mathcal{B}_1,m_1,\mathfrak{G}_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{B}_2,m_2,\mathfrak{G}_2)$がたがいに弱同型($\mathfrak{G}_1\overset{w}{\cong}\mathfrak{G}_2$)とは.

$\exists U;\ \Omega_1\to\Omega_2$ 1-1. onto. m'ble. invertible

non-singular. $(m_1(E_1)=0\rightleftarrows m_2(UE_1)=0\quad E_1\in\mathcal{B})$

$\ni\ \tilde{\forall}\omega_1\in\Omega_1,\quad U[\mathfrak{G}_1]\omega_1=[\mathfrak{G}_2]U\omega_1$　　但し $[\mathfrak{G}_1]\omega_1=\bigcup_{g_1\in\mathfrak{G}_1}g_1\omega_1$

二つのfactor M_1, M_2の間に*-演算を保つ代数的同型対応が存在するときM_1とM_2は同型であるという($M_1\cong M_2$)。

M_iを可算ergodic non-singular transformation group $\mathfrak{G}_i$から構成されるfactorとする。

定理 (W. Krieger [11])

$\mathfrak{G}_1\overset{w}{\cong}\mathfrak{G}_2\ \rightleftarrows$ (1) $M_1\cong M_2$

(2) 上の同型対応をW ($WM_1=M_2$)とすると $W\mathbb{L}_1=\mathbb{L}_2$　　但し$\mathbb{L}_i$は subalg. $\{L_\varphi\ ;\ \varphi\in\mathcal{L}^\infty(\Omega_i)\}$

$\mathfrak{G}$が1-generatorのとき(e.n.s.t.)特にII_1型では、weak-mixing. strong mixing, σ-Lebesgue spectrumをもつautomorphism, Kolmogorov automorphism の興味あるクラスとか、或いは II_∞ 型で zero-type positive type α-type [5] のクラス等が分かっているがそれは factor としてみるとすべて同型になる。即ち

定理（W. Krieger [10]）e.n.s.t. のクラスの中で、I_n, I_∞, II_1, II_∞ 型は弱同型を除いてそれぞれ 1 個である。

(注) factor の同型問題では I_n, I_∞ 型は勿論 1 つだが最近 McDuff によって II_1 型、II_∞ 型が非可算無限あることが知られた。

§7. III 型

7-1. III 型 factor の存在。

III 型 factor の存在については、[14] で Neumann が可算 ergodic non-singular transformation group の例からその存在例を与えた。

(1) (2) をみたす countable ergodic non-singular transformation group $\mathcal{G}$ on $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ を考える。

(1) $\exists \mu$; m とたがいに絶対連続有限測度或いは σ-有限測度

$\mathcal{G}_0 = \{ s \in \mathcal{G} \mid s\mu = \mu \}$ ergodic

(2) $\mathcal{G} \supsetneqq \mathcal{G}_0$

もしこのような$\mathcal{G}$が存在すれば、それはIII型である。何故ならたがいに絶対連続不変測度が存在すればそれはμ(とその定数倍)に限るから、それは(2)に矛盾する。

$\mathcal{G}$の例([14])

例1. μが有限

$\Omega = \{ z \mid |z| = 1 \}$ $m = \mu =$ Lebesgue measure

$|\theta| = 1$, $|u| < 1$ に対し $z \in \Omega$

$$g_1(\theta, u) z \equiv \theta \cdot \frac{z + u}{1 + \bar{u} z} \in \Omega$$

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ g_1(\theta, u) \;\middle|\; \begin{array}{l} u = 0 \text{ かつ } \theta = e^{2\pi i \rho} \quad \rho \text{ は有理数} \\ \text{or} \\ u = \frac{1}{2} \text{ かつ } \theta = 1 \end{array} \right\}$$

から生成される群

例2. μが無限

$\Omega = R^1$, $m = \mu =$ Lebesgue measure

ρ, σ に対し $x \in \Omega$

$$g_2(\rho, \sigma) x \equiv \rho x + \sigma$$

$$\mathcal{G}_2 = \{ g_2(\rho, \sigma) \mid \rho > 0, \ \sigma, \rho \text{ は有理数} \}$$

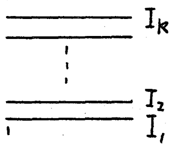
7-2. III型 e.n.s.t.の存在

エルゴード理論の方でIII型 e.n.s.t.の存在が未解決だったが[6]、それは D. Ornstein [17] によって肯定的に解決された。Neumannの与えた例は、$\mathcal{G}$が1-generatorではない。

Ornstein以後、Ⅲ型の例がA. Brunel[2], R. Chacon[3], L. Arnold [1], C.C. Moore[12], D. Hill[7]. によって次々に見つけられたが型は各々類似している。

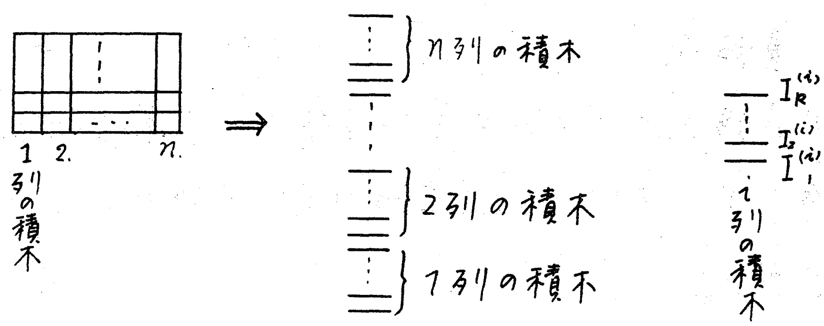
Stacking method を用いて与えられる以下の変換を考える。

(1) 同じ長さの区間がいくつか積み重ねられたものを積木という。



積木の各成分には確率mが与えられ $m(I_1)+m(I_2)+\cdots+m(I_k)=1$

(2) 積木をn-等分し左端から順に上に積み重ね新しく積木をつくる。



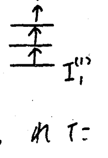
(3) あらかじめ与えられた確率$\{P_1,\cdots,P_n\}$に対して

$$m(I_j^{(i)}) = m(I_j)\times P_i$$

をみたす。

(4) 新しくつくられた積木の上に変換Tを与え、それは下から上へのずらしとする。天井では定義されないままにしておく。

T;



定義、積木が与えられたときnと確率$\{P_1,\cdots,P_n\}$に対して(2)

(3)(4) の操作が実行されるとき，確率 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ の下で n ケの積木を積み重ねるという。

$I=[0,1]$，$\{n_i\}_{i\geq 1}$ 自然数列，$P=\{P_1^{(i)}, \cdots, P_{n_i}^{(i)}\}_{i\geq 1}$ 確率の族とする。 I 上の変換 T と確率 m を帰納的に以下に定義する。

第1段； 積木 I (要素は1つ) と整数 n_1 に対し，確率 $\{P_1^{(1)}, \cdots, P_{n_1}^{(1)}\}$ の下で n_1 ケの積木を積み重ねる。

第 $k+1$ 段； 第 k 段で新しく作られた積木と整数 n_{k+1} に対し確率 $\{P_1^{(n_{k+1})}, \cdots, P_{n_{k+1}}^{(n_{k+1})}\}$ の下で n_{k+1} ケの積木を積み重ねる。

各段での積木の上のづらしは矛盾なく定義されているからその変換を T とする。 確率 m は各段の積木に与えられている確率である。

上で与えた変換 T on $(I, \mathcal{B}(I), m)$ は次に与える Product sp. 上の変換 T_P on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_P)$ と同型である。

$$\Omega \equiv \prod_{i=1}^{\infty}\{1, 2, \cdots, n_i\} \quad , \text{確率 } P^{(i)}(j) = P_j^{(i)} \quad 1 \leq j \leq n_i$$

$$m_P \equiv \prod_{i=1}^{\infty} P^{(i)}$$

$$T_P ; \quad \Omega \ni x = (x_i)_{i\geq 1}$$

$$T_P x = (1, \cdots, \overset{i}{1}, x_{i+1}+1, x_{i+2}, \cdots) \quad \text{if } x_1 = n_1, \cdots, x_i = n_i$$

$$x_{i+1} < n_{i+1} \quad i \geq 0$$

同型対応は Cantor expansion で与えられる。即ち

$$C ; \Omega \longrightarrow I$$

$$C(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - 1}{n_1 \times \cdots \times n_i} \qquad x = (x_i)_{i \geq 1}$$

C は測度 0 を除いて 1-1, onto, invertible, m'ble

$$C m_P = m$$

$$TC = C T_P$$

T (or T_P) の性質

(1) $T(T_P)$; e.n.s.t. on $(I ; \mathcal{B}(I), m)$ $((\Omega ; \mathcal{B}(\Omega), m_P))$

(2) $n_i = 2 \ (\forall i)$, $P_1^{(i)} = P_1$, $P_2^{(i)} = P_2$, $\frac{P_2}{P_1} = \lambda$ $P_1 + P_2 = 1$, $\alpha\lambda$

のクラスに制限して考えると

$T(T_P)$ が II_1 型 if $\lambda = 1$

III 型 if $\lambda \neq 1$

注、実はこのようにクラスを制限しなくても一般に T (T_P) が I_n, I_∞, II_1, II_∞, III 型になる為の P の条件が [12] [7] で求められている。

(3) g_i を $\{1, 2, \cdots, n_i\}$ 上の変換で $g_i(j) = j+1 \ (\mathrm{mod}\ n_i)$ とする。更に g_i を Ω に作用する変換と考える。即ち

$\Omega \ni x = (x_n)_{n \geq 1}$, $g_i x = (x_1, \cdots, \overset{i}{g_i x_i}, x_{i+1}, \cdots)$ 。このとき

$[T_P] = \{g_i \mid i \geq 1\}$ から生成される group.

III 型 e.n.s.t. (group) のクラスを知るのに Krieger [9] の方法

は有効である。今Neumannの与えた変換群のクラスで(1)の性質に着目して次のクラスを考える。

$\mathcal{G}$; 可算 e.n.s.t. group on $(\Omega, \mathcal{B}, m)$.

(1) $\exists \mu$; mとたがいに絶対連続有限(or σ-有限)不変測度. $\{S \in [\mathcal{G}] \mid S\mu = \mu\}$ ergodic

(2) $\mathcal{G} \ni \forall S$ に対し $\exists (E_i)$; Ωの可算分割 $(m(E_i) > 0)$

$$\frac{dS\mu}{d\mu} = \text{定数} (= a_i) \quad \text{on } E_i$$

定義 $\mathcal{G}$はμ-containedであるといい$(\mathcal{G}.\mu)$であらわす。

$\Delta(\mathcal{G}.\mu) = \{a_i \mid a_i$は$\mathcal{G}$の各元$S$に対して定まる$(a_i)\}$

から生成されるgroup.

$(\mathcal{G}.\mu)$-classの性質.

(1). $(\mathcal{G}.\mu)$に対し

$\mathcal{G}$が I or II型 if $\Delta(\mathcal{G}.\mu) = \{1\}$

III型 if $\Delta(\mathcal{G}.\mu) \neq \{1\}$

(2) 変換T_Pで特に$n_i = N(\forall i)$ $P_j^{(i)} = P_j$ $\forall i,j$ とし$[T_P] = \mathcal{H}_P$で表わす。

(i) $(\mathcal{H}_P . m_P)$

(ii) $\Delta(\mathcal{H}_P . m_P) = \{\frac{P_j}{P_i} \mid i,j\}$から生成されるgroup.

特に$N=2$ $\frac{P_2}{P_1} = \lambda$のとき $\Delta(\mathcal{H}_P . m_P) = \{\lambda^n \mid -\infty < n < \infty\}$

(3). $\Delta(\mathcal{G}.\mu)$ が 1-generator のとき simple $(\mathcal{G}.\mu)$ と呼ぶ。
一般に $\Delta(\mathcal{G}.\mu)$ は μ のとり方に関係し従がって弱同型の下で不変とは限らないが simple $(\mathcal{G}.\mu)$ ならば

$(\mathcal{G}.\nu)$ は simple $(\mathcal{G}.\nu)$ かつ $\Delta(\mathcal{G}.\nu)=\Delta(\mathcal{G}.\mu)$

従がって $\Delta(\mathcal{G}.\mu)$ は弱同型の下で不変.

注. (3) から $(\mathcal{H}_P.\ m_P)$ に対して次のことが云へる。

$N=2.\quad P_\lambda=(P_1,\ P_2).\quad \dfrac{P_2}{P_1}=\lambda.$

$\lambda=\lambda' \rightleftarrows \mathcal{H}_{P_\lambda}$ と $\mathcal{H}_{P_{\lambda'}}$ は弱同型.

尚、この結果については Powers [18] が $\mathcal{H}_{P_\lambda}$ から作られる factor $M(\mathcal{H}_{P_\lambda})$ に対して

$\lambda=\lambda' \rightleftarrows M(\mathcal{H}_{P_\lambda})\cong M(\mathcal{H}_{P_{\lambda'}})$

を示しⅢ型 factor が非可算無限個存在することを示している。

1. L.K. Arnold ; On 6-finite invariant measures. Zeit Wahr. Geb., 9(1968), 85-97.

2. A. Brunel ; Sur les measures invariant. Zeit. Wahr. Geb.,5(1966), 300-303.

3. R.V. Chacon ; A class of linear transformations. Proc. A.M.S. 15(1964), 560-564.

4. A. Hajian-Y. Ito ; Cesaro sums and m'ble transformations, J. Combinatorial Theory 7(1969), 239-254.

5. A. Hajian-S. Kakutani ; Weakly wandering sets and invariant measures, Trans. Amer. Math. Soc., 110(1964), 136-151.

6. P. Halmos ; Lectures on Ergodic Theory, Math. Soc. of Japan, Chelsea New York, 1956.

7. D. Hill ; r-infinite invariant measures on infinite product spaces, thesis, Yale Univ. 1969.

8. E. Hopf ; Theory of measures and invariant integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 34(1932), 373-393.

9. W. Krieger ; On non-singular transformations of a measure space I. Zeit, Wahr, Geb., 11(1969), 83-97.

10. ———— ; On non-singular transformations of a measure space II. Zeit, Wahr. Geb., 11(1969), 98-119.

11. ———— ; On constructing non-*isomorphic hyperfinite factors of type III. J. Functional Analysis 6(1970), 97-109.

12. C.C. Moore ; Invariant measures on product space 5th Berkely, Vol.2, Part II(1967), 447-459.

13. J. Murray and J. von Neumann ; On rings of operators Ann. Math. 37(1936), 116-229.

14. J. von Neumann ; On rings of operators III. Ann. Math. 41(1940),94-161.

15. M. Osikawa ; A construction of the invariant measures. Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. 15(1971), 182-189.

16. 浜地敏弘 — 押川元重；非特異変換の不変測度の存在問題に関連して，九州大学教養部数学雑誌 6 (1968) 1-10

17. D.S. Ornstein ; On invariant measure. Bull. Amer. Math. Soc.,66(1960), 297-300.

18. R.T. Powers ; Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings. Ann. of Math., 86(1967), 138-171.