数理解析研究所講究録
第150巻 1972年 77-85

コンパクトな統計的構造　その1

東京水産大　山田作太郎

序

統計的問題を考察するとき最も基礎になるのは集合X,その部分集合のつくるσ-代数S, (X,S)上の確率測度の集合Mの三つの集合である。(X, S)上のσ-有限な測度μが存在してMの任意の元がμに関して絶対連続であるとき,(X,S,M)は *dominated* であるという。この場合にはいろ〜詳しく今までに議論されてきた。しかし *dominated* な統計的構造を持っていない統計的問題もたくさんあるわけで,そのようなときつまり *dominated* な構造をもっていることを仮定しない一般の場合には未解決な問題もあり,また *dominated* なときに成り立っても一般の場合には成りたゝぬこともある。ここでは *dominated* よりもっと一般的な条件である *compact* な構造をもつ(X, S, M)について,§1で Pitcher[1]の論文の内容を一部紹介し§2で二,三の問題を考えてみる。

§1. Pitcherの結果（証明はきちんとすると長くなるのですべて略証にする。）

実数値S可測関数 f の $L_p(\mu)$ ノルムを $\|f\|_{p,\mu}$ で表わすとき、$\|f\|_{p,M}=\sup_{\mu\in M}\|f\|_{p,\mu}$ とおく。$1\leq p\leq\infty$ に対して $E_p(X,S,M)=\{f:\|f\|_{p,M}<\infty\}$ とする。

補題1　E_p は $\|f\|_{p,M}$ をノルムとするバナッハ空間である。(証明略)

任意に $\mu\in M$, $h\in L_q(\mu)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ をとって $l(h,\mu)(f)=\int fh\,d\mu$ $(f\in E_p)$ とおくと $l(h,\mu)\in E_p^*$ (E_p の共役空間) となる。μ と h を動かしてこれら $l(h,\mu)$ の有限個の一次結合の全体を $\mathcal{E}_p(X,S,M)$ とする。$\mathcal{E}_p$ は E_p^* の *total subset* になっているから E_p 上に $\mathcal{E}_p$ の元すべてを連続にする最弱の T_2 位相が入る。これを $\mathcal{E}_p$ 位相と呼ぶ。B_p でもって E_p の閉単位球を表わす。

定義　ある $1<p<\infty$ に対して、B_p が $\mathcal{E}_p$ 位相でコンパクトになるとき (X,S,M) はコンパクトであるという。ある $1<p<\infty$ でコンパクトであればすべての $1<p<\infty$ でコンパクトになる (定理2,3)

この定義によれば M が1点 μ からなるとき、$E_p=L_p(\mu)$, $\mathcal{E}_p$ 位相は $L_p(\mu)$ 上の弱位相と一致する。$B_p=W_p(\mu)$ と、このときおくと $1<p<\infty$ のとき $L_p(\mu)$ は回帰的であるから $W_p(\mu)$ は弱位相に関してコンパクト故に (X,S,M) はコンパクトになる。M の元の数をふやしてゆくときどこまでコンパクトを保存するか? 後に (X,S,M) が *dominated* のときには (X,S,M) はコンパクトになる。つまりコンパクトは *dominated* より一般的な概念であることを示す。(定理7) M を M から *generate* される *convex set* $C(M)$ でおきかえてもよい。つまり

$E_p(X, S, M) = E_p(X, S, C(M))$, $\|f\|_{p,M} = \|f\|_{p,C(M)}$, $\mathcal{E}_p(X, S, M) = \mathcal{E}_p(X, S, C(M))$となるのである。

$1 < p < \infty$のとき，$W_p(\mu)$は$L_p(\mu)$上の弱位相に関してコンパクトになる。よって$\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$は弱位相の直積弱位相でコンパクトとなる。$\forall \mu \in M$に対して$B_p \subset W_p(\mu)$故$i_p(f) = (f) \in \prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$なる$B_p$から$\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$への写像$i_p$が定義できる。$\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$に弱位相の直積弱位相を考えたとき$i_p$が連続になる最弱の位相を$B_p$上に入れたとき，この位相は$\mathcal{E}_p$位相の$B_p$上への相対位相と一致することを注意する。

定理1 (X, S, M)がコンパクトになるための必要十分条件は，ある$1 < p < \infty$に対して$i_p(B_p)$が閉集合になることである。

(略証) (X, S, M)がコンパクトであるとする。上に注意したことから$i_p(B_p)$はコンパクト。$\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$は$T_2$故$i_p(B_p)$は閉集合。$(f) \in i_p(B_p)$として$i_p^{-1}((f)) = f \in B_p$と定義する。$i_p(B_p)$はコンパクトで，$i_p^{-1}$は弱位相と$\mathcal{E}_p$位相に関して連続であることが容易に示せて，よって$i_p^{-1}(i_p(B_p)) = B_p$は$\mathcal{E}_p$位相でコンパクト。よって$(X, S, M)$はコンパクト。

補題2 $(f_\mu) \in \prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$とする。次の3つの条件は互いに同値である。(1) $(f_\mu) \in \overline{i_p(B_\infty)}$ (2) 任意の有限集合$\{\mu_1, \cdots, \mu_n\} \subset M$に対してある$f \in B_\infty$が存在して$f = f_{\mu_i}[\mu_i]$ $i = 1, 2, \cdots, n$が成り立つ。

(3) 任意の可算集合$\{\mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots\} \subset M$に対して，ある$f \in B_\infty$が存在して$f = f_{\mu_i}[\mu_i]$ $i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$が成り立つ。(証明は長くなるので略する。)

定理2. B_∞上ではすべての$1 \leq p < \infty$に対して$\mathcal{E}_p$位相と$\mathcal{E}_1$位相は一致

する。（略証）B_∞上定義よりE_p位相の方がE_1位相より強いのは明らかである。一方E_pの各元はB_∞上E_1のある列の一様収束極限になっていることが容易に示せて，従ってB_∞上両方の位相は一致する。

定理3 ある$1<p<\infty$に対してB_pがE_p位相でコンパクトになる必要十分条件はB_∞がE_1位相でコンパクトになることである。

（略証）（必要）$i_p(B_p)$が$\prod_{\mu\in M} W_p(\mu)$でコンパクト。$i_p(B_\infty)(\subset i_p(B_p))$は閉集合であることが容易に示せて従ってコンパクト。$i_p^{-1}: i_p(B_p) \to B_p$は連続であるから$i_p^{-1}(i_p(B_\infty))=B_\infty$は$E_p$位相でコンパクト。定理2より$B_\infty$は$E_1$位相でコンパクト。（十分）勝手に$1<p<\infty$をとり，$(f_\mu)\in\overline{i_p(B_p)}$を勝手にとる。$f_\mu^{(n)}(x)=f_\mu(x)$ if $|f_\mu(x)|\leqq n$，$=0$その他とし$f_\mu^{(n)}$を定義するとすべてのnに対して$(\frac{1}{n}f_\mu^{(n)})\in\overline{i_p(B_\infty)}$となる。定理2より$B_\infty$は$E_p$位相でコンパクト。よって$i_p(B_\infty)$はコンパクト従って閉集合。よってある$b_n\in B_\infty$が存在して$\frac{1}{n}f_\mu^{(n)}=b_n\ [\mu]$ for all $\mu\in M$。このときある$f\in B_p$が存在して$nb_n\to f\ [\mu]$ for all $\mu\in M$, $f=f_\mu[\mu]$ for all $\mu\in M$となる。よって$i_p(B_p)$はclosed。定理1より(X,S,M)はコンパクト。

定理4 (X,S,M)がコンパクトであるための必要十分条件はある$1<p<\infty$に対して$i_p(B_\infty)$が$\prod_{\mu\in M}W_p(\mu)$で閉集合となることである。

（略証）定理3の証明より明らか。

定理5 (X,S,M)がコンパクトで$M'\subset M$ならば(X,S,M')もコンパクト。

（略証）定理3より$B_\infty(X,S,M)$が$E_1(X,S,M)$位相でコンパクト。iを

$B_\infty(X,S,M)$ から $B_\infty(X,S,M')$ への恒等写像とする。$B_\infty(X,S,M)$ には $\Xi_1(X,S,M)$ 位相 $B_\infty(X,S,M')$ には $\Xi_1(X,S,M')$ 位相を入れるとではこの両方の位相に関して連続かつ全射となる。よって $B_\infty(X,S,M')$ は $\Xi_1(X,S,M')$ 位相でコンパクト よって (X,S,M') はコンパクト。(定理3)。

定理6 $\overline{M}=\{\nu \mid \nu$ は確率測度, $\exists\{\mu_i \mid i=1,2,\cdots\}\subset M,\ \nu\ll\{\mu_i\}\}$ とする。(X,S,M) がコンパクトならば $(X,S,\overline{M})$ もコンパクト。

(略証) 任意に $\nu\in\overline{M}$ をとる。定義より $\exists\{\mu_i\}\subset M \Rightarrow \nu\ll\{\mu_i\}$。

このとき S 可測な関数列 $\{f_i\}_{i=1,2,\cdots}$ で次式をみたすものが存在することは容易にわかる。$\forall E\in S$ に対して $\nu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_E f_i\,d\mu_i$。任意に $l(h,\nu)\in\Xi_1(X,S,\overline{M})$ をとる。このとき h は有界関数としてよい。

$\sum_{i=1}^{n} l(\inf(f_i,n)h,\mu_i)\in\Xi_1(X,S,M)$ がすべての n に対して成りたち $B_\infty(X,S,\overline{M})$ 上 $\sum_{i=1}^{n} l(\inf(f_i,n)h,\mu_i)$ は $l(h,\nu)$ に一様収束する。よって $B_\infty(X,S,\overline{M})$ 上 $\Xi_1(X,S,M)$ 位相と $\Xi_1(X,S,\overline{M})$ 位相とは一致し, $B_\infty(X,S,\overline{M})$ は $\Xi_1(X,S,M)$ 位相でコンパクトとなることがわかるから. $B_\infty(X,S,\overline{M})$ は $\Xi_1(X,S,\overline{M})$ 位相でコンパクト よって $(X,S,\overline{M})$ はコンパクト。

定理7 (X,S,M) が *dominated* ならば (X,S,M) はコンパクト。

(証明) $M\ll\mu$ とする。μ は確率測度としてよい。最初にのべたように $(X,S,\{\mu\})$ はコンパクト。よって定理6より $(X,S,\overline{\{\mu\}})$ もコンパクト。$M\ll\mu$ より $M\subset\overline{\{\mu\}}$ よって定理5より (X,S,M) はコンパクト。

[例1] $\alpha\in\Lambda$. $(X_\alpha,S_\alpha,M_\alpha)$ はコンパクトとする。ただし $\alpha,\beta\in\Lambda$. $\alpha\neq\beta$ ならば $X_\alpha\cap X_\beta=\phi$ とする。勿論任意の Λ に対して上の条件をみ

たす$(X_\alpha, S_\alpha, M_\alpha)$は存在する。$X \equiv \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $S \equiv \{A \mid A \subset X.\ A \cap X_\alpha \in S_\alpha$ for all $\alpha \in \Lambda\}$, $\mu \in M_\alpha$のときμをSに, $A \in S$のとき$\mu(A) = \mu(A \cap X_\alpha)$によって拡張しておく。拡張した$\mu$の全体を$M$とおく。

このとき(X, S, M)がコンパクトになることは定理1を使って簡単に示せる。一方Λが非可算であれば(X, S, M)は dominated ではない。よって compact は dominated よりもほんとうに一般的な条件である。

(例2) コンパクトでない例もある。$X = [0,1]$, SをX上のボレル集合の全体。MをX上の単位分布またはX上のルベーグ測度lによって dominate されている確率測度全体とする。$A \subset X$とする。$f_\mu(x) = 1$ if $x \in A$, $\mu(\{x\}) = 1$. その他のとき$= 0$とする。任意の$1 < p < \infty$に対して$(f_\mu)_{\mu \in M} \in \overline{i_p(B_p)}$が示せる。よってもし$(X, S, M)$がコンパクトならば$B_p$の元$b$が存在して$b = f_\mu\ [\mu]$ for all $\mu \in M$となる。従って$b = \chi_A$でなければならぬ。bはS可測。しかし$A \notin S$とするとこれは矛盾である。よって(X, S, M)はコンパクトではない。

(注意) 以上コンパクトな統計的構造を紹介してきたが pitcher はさらにいろいろな結果を得ている。その中で特に大切と思われる結果二つをのべておく。(1) (X, S, M)がコンパクトなときには最小十分σ-代数が存在する。(2) $E_p(X, S, M)$が回帰的ならば(X, S, M)は dominated である。

§2. 2つの問題

$\mathcal{P}$を(X, S)上の確率測度の全体とする。$\mathcal{P} \ni \mu, \nu$に対して

$d(\mu, \nu) = \sup_{A \in S} |\mu(A) - \nu(A)|$とおく。$\mathcal{P}$は距離空間となる。

以下この位相を考える。(定理1)(系)

定理1. (X, S, M)がコンパクトならば$(X, S, \overline{C(M)})$もコンパクト。

(証明) (X, S, M)がコンパクトならば$(X, S, C(M))$もまたコンパクト(これは§1の最初に注意した。) 勝手に$\mu \in \overline{C(M)}$をとり、

$V_n(\mu) = \{ \nu \mid d(\mu, \nu) < \frac{1}{n} \}$ (n:自然数)とおく。このとき任意のnに対して$\nu_n \in C(M) \cap V_n(\mu)$が存在する。今$\nu_n(A) = 0$, $n = 1, 2, \cdots$ $A \in S$なるAを勝手にとると、$|\mu(A) - \nu_n(A)| \leqq d(\mu, \nu_n) < \frac{1}{n}$ $n = 1, 2 \cdots$。よってすべてのnに対して$\mu(A) < \frac{1}{n}$ 故に$\mu(A) = 0$

故に$\mu \ll \{\nu_n\} \subset C(M)$。$M_0 = \{ \nu \mid \nu$は確率測度, $\exists \{\nu_n\} \subset C(M)$ $\nu \ll \{\nu_n\} \}$とおくと$\overline{C(M)} \subset M_0$ 定理6より(X, S, M_0)はコンパクトよって定理5より$(X, S, \overline{C(M)})$もコンパクト。

系 (X, S, M_i) $i = 1, 2$はコンパクトとする。$M = M_1 \cup M_2$とおく。

M_1またはM_2がMで*dense*であれば(X, S, M)はコンパクトとなる。

(証明) 定理1より明らか。

(注意) (X, S, M_i) $i = 1, 2$がコンパクトであっても、一般には$(X, S, M_1 \cup M_2)$はコンパクトにはならない。なお次のことは定理6よりわかる。(X, S, M_i) $i = 1, 2$はコンパクトであるとする。すべての$\mu_1 \in M_1 - M_2$, すべての$\mu_2 \in M_2 - M_1$が互いに絶対連続であれば、

$(X, S, M_1 \cup M_2)$ はコンパクトになる。

定理２ $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$, (X, S, M_n)はコンパクトとする。$n=1,2,\cdots$

$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ とおくと，(X, S, M) はコンパクトになる。

（証明）$(f_\mu)_{\mu \in M} \in \overline{ip(B_\infty(X, S, M))}$ を勝手にとる。このときすべての n に対して $(f_\mu)_{\mu \in M_n} \in \overline{ip(B_\infty(X, S, M_n))} \subset \prod_{\mu \in M_n} W_p(\mu)$ となる。何故なら，勝手に $(f_\mu)_{\mu \in M_n}$ の近傍 $V((f_\mu)_{\mu \in M_n}) = V(f_{\mu_1}) \times \cdots \times V(f_{\mu_k}) \times \prod_{\substack{\nu \neq \mu_j \\ \nu \in M_n \\ j=1,\cdots,k}} W_p(\nu)$

をとる。今 $V((f_\mu)_{\mu \in M}) = V(f_{\mu_1}) \times \cdots \times V(f_{\mu_k}) \times \prod_{\substack{\nu \neq \mu_j \\ \nu \in M \\ j=1,\cdots,k}} W_p(\nu)$（ただし $V(f_{\mu_j})$ は上にとったものと同じとする。）とおく。

$(f_\mu)_{\mu \in M} \in \overline{ip(B_\infty(X, S, M))} \subset \prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$ 故 $V((f_\mu)_{\mu \in M}) \cap ip(B_\infty(X, S, M)) \neq \phi$ よって $g \in B_\infty(X, S, M)$ が存在して $(g)_M \in V((f_\mu)_{\mu \in M})$。
$g \in B_\infty(X, S, M) \subset B_\infty(X, S, M_n)$ であるから $(g)_{M_n} \in V((f_\mu)_{\mu \in M_n}) \cap ip(B_\infty(X, S, M_n))$ よって $(f_\mu)_{\mu \in M_n} \in \overline{ip(B_\infty(X, S, M_n))}$ となる。(X, S, M_n) はコンパクト故 $ip(B_\infty(X, S, M_n))$ は閉集合。よって $h_n \in B_\infty(X, S, M_n)$ が存在して $f_\mu = h_n\ [\mu]$ for all $\mu \in M_n$ が成りたつ。今 $h_n'(x) = h_n(x)$ if $|h_n(x)| \leqq 1$, $= 0$ その他 とおくと $h_n' = h_n\ [\mu]$ for all $\mu \in M_n$ 故に存在する h_n は最初から $|h_n(x)| \leqq 1$ for all $x \in X$ をみたしているものとしてよい。$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ if $x \in \{x : \exists \lim_{n\to\infty} h_n(x)\}$ $= 0$ その他 とおくとすべての $x \in X$ に対して $|h(x)| \leqq 1$ 故に $h \in B_\infty(X, S, M)$。今勝手に $\mu \in M$ をとる。番号 n_0 が存在してすべての $n \geqq n_0$ に対して $\mu \in M_n$ となる。よって $h_n = f_\mu\ [\mu]$。

$N_{n,\mu} = \{x : h_n(x) \neq f_\mu(x)\}$, $N_\mu = \bigcup_{n \geqq n_0} N_{n,\mu}$ とおくと, $\mu(N_{n,\mu})=0$ 故 $\mu(N_\mu)=0$. $x \overline{\in} N_\mu$ のとき, $f_\mu(x) = h_{n_0}(x) = h_{n_0+1}(x) = \cdots$. よって $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f_\mu(x)$. よって $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ よって $N_\mu^c \subset \{x : \exists \lim_{n\to\infty} h_n(x)\}$ よって $\{x : \not\exists \lim_{n\to\infty} h_n(x)\} \subset N_\mu$ 故に $\mu(\{x : \not\exists \lim_{n\to\infty} h_n(x)\}) = 0$.

$x \overline{\in} N_\mu$ なら上に示したように $h(x) = f_\mu(x)$ よって $\{x : h(x) \neq f_\mu(x)\} \subset N_\mu$ 従って $h = f_\mu\ [\mu]$ μ は勝手であった。かつ $h \in B_\infty(X, S, M)$ であった。故に $(f_\mu)_{\mu\in M} \in i_p(B_\infty(X, S, M))$ つまり $i_p(B_\infty(X, S, M))$ は $\prod_{\mu\in M} W_p(\mu)$ で閉集合。よって (X, S, M) は コンパクト。

参考文献

[1] T.S. pitcher *A more general property than domination for sets of probability measures* Pacific J. of Math. 1965 vol 15 No 2 P. 597 — 611