数理解析研究所講究録
第 151 巻 1972 年 1-10

正規過程の多重マルコフ性に関する二つの話題

名大 理　　飛田武幸

§1. 序

こゝで紹介しようとする話題は，いづれも P. Lévy によって多次元パラメーターをもつブラウン運動の研究に関連して創められたものであって，それらは正規型確率変数系の従属性のあり方，およびその研究法を例示していると考えられる．はじめに（§2）述べるのは正規過程の弱義の多重マルコフ性である．いま R^n をパラメーター空間とするブラウン運動 $\{X(A);\ A\in R^n\}$ を考える．それは $X(O)=0$（O は R^n の原点）とする正規型確率変数系 $\{X(A);\ A\in R^n\}$ で

$$(1)\qquad E\{X(A)X(B)\}=\frac{1}{2}\{r(O,A)+r(O,B)-r(A,B)\}$$

（r は R^n における距離）をみたすものである．中心 O，半径 t の球面 $S^{n-1}(t)$ （$\subset R^n$）上で $X(A)$ を平均して得られる確率変数を $M_n(t)$ とかき $\{M_n(t);\ t\geq 0\}$ を一般に（

$n \geqq 1$) $M(t)$ 過程と呼ぶ．それは明らかに正規型であり，nが奇数，$n = 2p+1$，のときは（狭義）$p+1$重マルコフ過程になる．その性質を反映して，$M_{2p+1}(t)$ の一次元ブラウン運動$\{B(t)\}$による標準表現を

$$(2) \qquad M_{2p+1}(t) = \int_0^t F_{2p+1}(t,u)\, dB(u)$$

とすれば，標準核 $F_{2p+1}(t,u)$ は

$$(3) \qquad F_{2p+1}(t,u) = \sum_{i=1}^{p+1} f_i(t)\, g_i(u) \quad , \qquad t \geq u .$$

なる形のいわゆる $p+1$次 *Goursat* 核となる（*Lévy* [1]）.

狭義多重マルコフ性に対して要請される正規過程自身の微分可能性の條件を忘れ，その標準核が (3) の形の *Goursat* 核であることのみを要求して，自然に弱義多重マルコフ性の概念に到達する．実際そのような正規過程は，*prediction* の問題その他で通常のマルコフ性に準じた著しい特長を示している．また若干の制約の下に，その共分散による特長づけが可能である．

もう一つの話題は R^n をパラメーター空間とするブラウン運動 $\{X(A)\,;\, A \in R^n\}$ に対するホワイトノイズについてである．それがどのように定義され，どのように$\{X(A)\}$と結びつけるべきかといった問題については，いろいろな立場から

多くの研究がなされてきた。こゝではまず半径Rのn次元球面$S^n(R)$をパラメーター空間にもつブラウン運動$\{X(A); A\in S^n(R)\}$とそのホワイトノイズとの明快な対応をみて（Lévy [2] による），それを$R\longrightarrow\infty$とすることにより，ブラウン運動$\{X(A); A\in R^n\}$に対応するホワイトノイズをもとめ，かつ両者の相互関係をみる（§3）．実はそれが H. P. McKean [5] に述べられているものと同等な結果を与えることがわかる．

§2. 弱義多重マルコフ性.

まず Lévy [3, Complément, Chap. I] に従った定義を述べるが，本節では考える過程$\{X(t); t\geqq 0\}$はすべて正規型で$EX(t)\equiv 0$なるものとしておく．

定義 1　$\{X(t)\}$に対しn個の補助的な正規過程$\{X_i(t)\}_{i=1}^{n}$があって

$$(4)\qquad X(t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)X_i(t)$$

とかけて，任意の$t'>t$に対して

$$(5)\qquad X_i(t')=\sum_{j=1}^{n}f_{i,j}(t,t')X_j(t)+Y_i(t,t')$$

とかけるとき，$\{X(t)\}$はn重線型マルコフであるという．こ

こに $Y_i(t,t')$ は $\{X_j(u)\ ;\ u\in[0,t],\ j=1,2,\cdots,n\}$ と独立な確率変数である．

<u>定義2</u>．$\{X(t)\}$ が n 重線型マルコフであり，かつ $X(t)$ が $n-1$ 回微分可能で，定義１の $X_i(t)$ として $X(t)$ の導関数 $X^{(i-1)}(t)$ をとることができるとき，$\{X(t)\}$ を<u>狭義 n 重線型マルコフ過程</u>という．

（正規過程のみを扱っていること，および後の議論からわかるように，定義での"線型"なる語は省いてもよい）．

定義１の儘では，補助的に考えられた $X_i(t)$ が $\{X(u)\ ;\ u\leq t\}$ の関数となっていることが期待されないという不便さが残る．さらに強く條件つき平均値 $E(X(t')/\mathcal{B}_t(X))$，$\mathcal{B}_t(X)$ は $\{X(u)\ ;\ u\leq t\}$ を可測にする最小の σ-field，が (5) の第一項の一次結合となって居ればいろいろと好都合である．そこで次のような定義をしよう．

<u>定義3</u>．任意の $t_0\leqq t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対し $E\{X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0}(X)\}$，$i=1,2,\cdots,n$，が一次独立であるが，$t_1<t_2<\cdots<t_{n+1}$ に対しては $E\{X(t_i)/\mathcal{B}_{t_0}(X)\}$，$i=1,2,\cdots,n+1$，が一次従属になるとき $\{X(t)\}$ を<u>弱義 n 重マルコフ過程</u>という．

特に $\{X(t)\}$ が標準表現をもち，$\mathfrak{M}_t(X)$（$\equiv\{X(u)\ ;\ u\leq t\}$ の張る空間）の t に関する連続性を仮定してよい場合には

$$(6)\qquad X(t)=\int_0^t\sum_{i=1}^n f_i(t)\,g_i(u)\,dB(u)$$

と表わすことができて，$X_i(t)=\int_0^t g_i(u)\,dB(u)$ として定義1の条件がみたされ，さらに前述の要請もみたされていることがわかる（Hida [4, Section II] 参照）．この特殊な場合が定義2の場合であることは明らかである．

上の諸定義によって定められる多重マルコフ過程については，その従属性の時間的推移に関して著しい性質があるが，詳細は文献 [1]，[3]，[4] 等に譲る．

多重マルコフ性をもつ正規過程の共分散関数はまたGoursat型である．例えば (6) の形の表現をもつ弱義 n 重マルコフ過程の共分散関数は，$t>s$ として，

$$(7)\qquad \Gamma(t,s)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,h_i(s),\quad \text{但し}\quad h_i(s)=\sum_{j=1}^{n} f_j(s)\int_0^s g_i(u)g_j(u)\,du,$$

と表わされる．この事実は，ある意味で，弱義多重マルコフ性の特長づけにもなっている．それを次に述べよう．

<u>Yaglomの問題</u>　：$[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上の関数

$$(8)\qquad \Gamma(t,s)=\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t\vee s)\,\psi_i(t\wedge s)$$

$$(t\vee s=\max\{t,s\},\ t\wedge s=\min\{t,s\})$$

が positive definite であるための条件を求めよ．

これを若干修正して次のような問題にする

<u>問題</u>　(8) で与えられる $\Gamma(t,s)$ が，ある種の平均0の正

規過程の共分散関数であるための條件を求めよ.

ここで(8)の φ_i, ψ_i について若干の仮定をおく.

仮定 i) すべての $\varphi_i \in C^n$,

Wronskian $W(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N) \neq 0$, $\forall t$.

ii) すべての $\psi_i \in C$,

$\{\psi_i\}$ は任意の区間で一次独立.

このとき上の問題に対して次のような解答がえられる.

問題の解答. (8)で与えられる $\Gamma(t,s)$ が上の仮定 i), ii) をみたすとする. $\Gamma(t,s)$ が, 標準表現をもち $\mathfrak{M}_t(X)$ が t について連続であるような正規過程 $\{X(t)\}$ の共分散関数であるための必要かつ十分な條件は, $L^2[0,s]$ の内積を用いた Gram の行列 $G(s)$, $\det G(s) \neq 0$ ($\forall s$), が存在して

$$(9) \qquad \Psi(s) = G(s)\,\Phi(s)^*, \qquad \forall s > 0,$$

となることである. 但し

$$\Psi(s) = (\psi_1(s), \cdots, \psi_n(s)), \quad \Phi(s) = (\varphi_1(s), \cdots, \varphi_n(s)).$$

従って, $t > s$ のとき

$$(10) \qquad \Gamma(t,s) = \Phi(t)\,G(s)\,\Phi(t)^*.$$

確率論的証明は [4, Section II] の方法を用いて与えられる.

§3. 多次元パラメーターブラウン運動とホワイトノイズ.

ホワイトノイズは各点独立という最も単純であり，かつ典型的な従属性をもっている．一般のパラメーター空間をもつ正規過程をホワイトノイズによる積分で表現できれば，一次元パラメーターの場合のように，マルコフ性を調べるのに大いに役立つであろう．しかし，そのような表現の方法は，ブラウン運動の場合ですら決定的な方法は得られていない．

まず半径 R の n 次元球面 $S^n(R)$ をパラメーター空間にもつブラウン運動 $\{X(A);\ A \in S^n(R)\}$ を考えよう．それは定数を除き $X(A) - X(B)$ が平均 0，分散 $\rho(A,B)$（$S^n(R)$ での距離）の正規分布に従うような正規型確率変数系として定義される．

このブラウン運動に対して，妥当と考えられるホワイトノイズは，$S^n(R)$ 上の一様な Borel 測度を m とするとき，次のような正規型の *random measure* $\underline{\underline{M}}$ として与えられる：

$$\underline{\underline{M}} = \left\{ M(S)\ ;\ S \text{ は } S^n(R) \text{ の Borel 集合} \right\}$$

$$E\left(M(S_1)\cdot M(S_2)\right) = m(S_1 \cap S_2).$$

S_A によって A を中心とする $S^n(R)$ の半球面をあらわし

$$(11) \qquad X_0(A) = c\int_{S_A} dM\ , \qquad c \text{ 定数},$$

とすれば，Cを適当にとって $\{X_0(A)\ ;\ A\in S^n(R)\}$ はブラウン運動の一つの version になっていることがわかる．この事実はまたブラウン運動 $\{X(A)\ ;\ A\in S^n(R)\}$ の存在をも保障している．

さて $S^n(R)$ 上の一点 O を固定し

$$X_1(A) = X_0(A) - X_0(O)\ , \qquad A\in S_O$$

として，半球面上の新しい version $\{X_1(A)\ ;\ A\in S_O\}$ を考えると，$X_1(A)$ もまた $\underline{\underline{M}}$ を半球面 S_O に制限したものによって表現することができる．このとき積分範囲は球面月形 F_A となる．

また O を固定したまゝ半径 R を $\longrightarrow\infty$ にすれば，S_O をパラメーター空間とするブラウン運動 $\{X_1(A)\}$ は R^n をパラメーター空間とするブラウン運動 $\{X'(A)\ ;\ A\in R^n\}$ に移る．これに呼応して $\underline{\underline{M}}$ は R^n 上の random measure $\underline{\underline{N}}$

$$\underline{\underline{N}} = \{N(B)\ ;\ B \text{ は } R^n \text{ の Borel 集合}\}$$

に移る．こゝで μ は m から上の対応によって導かれる R^n の Borel 測度である．例えば $n=2$ なら

$$\mu(dx\,dy) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

である．

さらに球面月形は R^n のある半空間に対応する．$\underline{\underline{N}}$ は O を中心とする回転で不変だから，例えば $X'(A)$ と N による積

分で表わすのに

(12) $X'(A) = \int_{P_A} dN$, $A \in R^n$,

とすることができる．こゝに P_A は次式で定まる半空間である：

$$P_A = \{ B \in R^n ; \text{ 内積 } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \geq 1 \}.$$

O を中心として単位円に関する反転を行って新しい random measure $\underline{\underline{N}}'$ を作り (12) の表現を書すと，P_A は OA を直径とする球に移り，ちょうど McKean [5] によって得られた表現と同じになる．

実数 t をパラメーターにもつ場合のように，ブラウン運動をはじめ一般の正規過程をホワイトノイズを用いていわゆる "標準的 (canonical)" な表現ができることが望ましいが，こゝに述べたものはその立場からは十分満足できるものとは言い難い．この方向での詳しい研究が望まれるところである．

[References]

[1] P. Lévy, A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions, Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. II (1955), 133-175.

[2] _______, Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann, Rendiconti Circolo Mat. Palerms, Ser. II, 8 (1959), 1-14.

[3] _______, Processus stochastiques st mouvement brownian, 1965, Paris, Gauthier-Villars

[4] T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications, Memoirs of the College of Sci. Univ. of Kyoto, A, 33 (1960) 109-155.

[5] H. P. McKean Jr. Brownian motion with a several-dimensional time, Theory Prob. Appl. 8 (1963), 335-354.