数理解析研究所講究録
第151巻 1972年 54-67

$\mathbb{R}^d$-径数の $Z(=L_2(\Delta))$ の構造について。(回転不変の場合)

阪大 理　小谷 眞一

§1 序

定常過程の spectral density を Δ としたとき、ヒルベルト空間 $Z(=L_2(\Delta))$ の構造を調べることは線型予測理論への応用、又それ自身解析の問題としても興味ある問題である。

1次元 $(d=1)$ の場合は N. Levinson, H.P. McKean [1], Dym H.P. McKean [2], M.G. Krein [3] らにより詳細に研究されている。多次元 $(d\geq 2)$ の場合は O.A. Presnjakova [4], O.I. Orebkova [5] らにより D が有界凸集合のとき $Z(D)(=L(e^{i\lambda\cdot x}: x\in D))$ の analytic な性質が調べられているが、これはほぼ1次元の場合の [1] に対応する結果である。一方私は [6] で $Z(D)$ を Fourier 変換で特徴付け、とくに D が有界のときには再生核をもつことを注意した。

そこで私はこの報告で多次元の場合の Z の構造について、とくに Δ 及び D が回転不変の場合に球面調和関数で展開する

ことにより1次元化して調べる。方法はcosin, sin変換，Fourier-Bessel変換に対応する変換を導入することにある。

§:2　一般化されたFourier-Bessel変換について．

この§では以下の準備のため上の変換についての一般論を述べる。尚この§での特殊関数及びその記号については犬井[7]に従う。

Gegenbauerの多項式を $C_m^{\frac{d-2}{2}}(x)$ とし $K_m^d(x)=\dfrac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{\frac{d}{2}}\binom{m+d-3}{m}}C_m^{\frac{d-2}{2}}(x)$ とする。Fourier-Bessel変換でのBessel関数の役目をする関数 $\varphi_m(\rho)$ を次のように定める。

$$\varphi_m(\rho)=\int_{S\times S}e^{i\rho\theta\cdot\varphi}K_m^d(\theta\cdot\varphi)\,d\theta\, d\varphi$$

但し S は $\mathbb{R}^d$ の単位球面，$d\theta\,(d\varphi)$ はその面積要素を表わす。φ_m はBessel関数 $J_{m+\frac{d-2}{2}}$ を用いて次のように書ける。

$$(*)\quad \varphi_m(\rho)=i^m(2\pi)^{\frac{d}{2}}\frac{J_{m+\frac{d-2}{2}}(\rho)}{\rho^{\frac{d-2}{2}}}$$

φ_m により変換 $\mathcal{F}_m$ を次のように定める。

$$(\mathcal{F}_m f)(t)=\int_0^\infty\varphi_m(tr)f(r)r^{d-1}dr.$$

このとき次の補題が成り立つ。

補題 1

(1) $\int_0^\infty |f(r)|\, r^{d-1}\, dr < +\infty$ かつ $\int_0^\infty |\mathcal{F}_m f(t)|\, t^{d-1}\, dt < +\infty$

なる関数に対しては，

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^\infty \overline{\varphi_m(tr)}\,(\mathcal{F}_m f)(t)\, t^{d-1}\, dt$$

(2) $\int_0^\infty |f(r)|^p\, r^{d-1}\, dr < +\infty \quad (p=1,2)$

なる関数に対しては，

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_m f(t)|^2\, t^{d-1}\, dt = (2\pi)^d \int_0^\infty |f(r)|^2\, r^{d-1}\, dr$$

証明は $\mathbb{R}^d$ での Fourier 変換論を関数 $F(x) = F(r\theta) = f(r)\, K_m^d(\theta\cdot e)$ ($e = (1,0,\ldots,0)$) に適用することによりできる。

(※)より φ_m は2階微分作用素 $L_m = -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{d-1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \frac{m^2+(d-2)m}{\rho^2}$ で不変である。即ち

$$(\ast\ast) \qquad L_m \varphi_m = \varphi_m .$$

この恒等式を考慮して次の急減少関数空間を導入する。$R_+ = (0,\infty)$, $\overline{R_+} = [0,\infty)$ とするとき $C^\infty(\overline{R_+})$ でもって R_+ で無限回微分可能で原点で任意回数の右微分が存在する空間を表わす。このとき空間 $S_m^d(\overline{R_+})$ は次のように定義される。

$$S_m^d(\overline{R_+}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\overline{R_+}) \;\middle|\; \sup_{0<r<+\infty} \left| r^p D_r^l L_m^k \varphi(r) \right| < +\infty \quad \forall\, p, l, k \geq 0 \right\}$$

但し $D_r = \frac{d}{dr}$ を表わすとする。空間 $\mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ は作用素 L_m で閉じていることを注意しておく。$\mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ の元についての変換 $\mathcal{F}_m$ に対しては次の補題が成り立つ。

補題 2

(1) $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\sup_r |L_m f(r)| < +\infty$ と $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ に対し

$$\int_0^\infty f(r)(L_m\varphi)(r)\, r^{d-1} dr = \int_0^\infty (L_m f)(r)\, \varphi(r)\, r^{d-1} dr$$

(2) $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ に対し

$$L_m^k(\mathcal{F}_m\varphi)(t) = \mathcal{F}_m(r^{2k}\varphi)(t)$$

$$\mathcal{F}_m(L_m^k\varphi)(t) = t^{2k}(\mathcal{F}_m\varphi)(t)$$

(3) $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ でかつ $|\mathcal{F}_m\varphi(r)| \le \frac{C_k}{1+r^k} \quad \forall k \geq 0.$

ならば、 $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$

証明は恒等式 $L_m \varphi_m = \varphi_m$ より $(L_m)_t \varphi_m(tr) = r^2 \varphi_m(tr)$ に注意すれば困難はない。(2)より $\mathcal{F}_m\mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ の元は任意の多項式の逆数より早く収束する。尚 $\mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ は $\mathcal{F}_m$ により下の空間 $\widetilde{\mathcal{S}}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ の中に移る。このことは(3)の帰結である。

$$\widetilde{\mathcal{S}}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \;\middle|\; \sup_{0<t<\infty} \left| L_m^k D_t^l t^{2p} \varphi(t) \right| < +\infty \quad \forall k, l, p \geq 0 \right\}$$

最後に $\{t\}$ に support をもつ $(\mathcal{S}_m^d(\overline{R_+}))'$ の元の特徴付けに関係した次の補題をあげておく。

<u>補題 3</u>

$\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\overline{R_+})$ に対して

$$\int_0^\infty r^k\,\overline{\varphi_m^{(k)}(tr)}\,(\mathcal{F}_m\varphi)(r)\,r^{d-1}dr=(2\pi)^d\varphi^{(k)}(t)$$

$$\forall k\geqq 0\ ,\ \forall t>0$$

証明は $k=0$ のときは補題 1 の (1) によるが，$k\geqq 1$ のときは帰納法によりできる。

今までの議論は $d\geqq 3$ の場合にしかできていないが $d=1$ の場合は変換 $\mathcal{F}_m$ が cosin, sin 変換，$d=2$ の場合には $\mathcal{F}_m$ が Fourier-Bessel 変換となることにより平行した議論が可能であることを注意しておく。

§ 3　Z の球面調和関数による分解
（Δ，D ともに回転不変の場合。）

この§ではΔ，Dともに回転不変の場合に球面調和関数により$\mathcal{Z}(D)$（$\partial\mathcal{Z}(D)$）を分解して，その各々の空間$\mathcal{Z}_m^T$（$\partial\mathcal{Z}_m^T$）を§2で導入した変換で特徴付けることを考える。

まず[6]により次のことが分っている。単調増大非負連続関数Tがあって積分の収束条件$\int^{+\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^2}d\rho<+\infty$をみたしているとする。このTに対して$\Delta$が次の条件を満足している場合を考える。

$$\begin{cases} \circ \quad \dfrac{1}{\Delta(x)} \le C e^{T(|x|)} & |x| \text{ 十分大} \\ \circ \quad \dfrac{1}{\Delta} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) & \end{cases}$$

このとき任意の有界集合Dに対して，$\mathcal{Z}(D)$は2変数として連続な再生核をもつ。

この事実を考慮して以下Δは回転不変で多項式のorder程

$$\frac{1}{\Delta(x)} \le C|x|^p \qquad {}^{\exists}p\geq 0 \quad |x| \text{ 十分大}$$

の場合のみを考える。

$J(x,y)$を$\mathcal{Z}(\{x\in\mathbb{R}^d \mid T_1\le|x|\le T_2\})$の再生核とする。但し$0\le T_1<T_2<+\infty$とする。このとき$J$は回転不変であり，又2変数について連続であるから球面調和関数による展開が可能で，

$$J(r\theta,t\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty} h(m,d)\, a_m(r,t)\, K_m^d(\theta\cdot\varphi)$$

但し$h(m,d)=(2m+d-2)\dfrac{(m+d-3)!}{(d-2)!\,m!}$，

$$a_m(r,t)=\int_{S\times S'} J(r\theta, t\varphi)\,k_m^d(\theta\cdot\varphi)\,d\theta\, d\varphi$$

となる。Δに対する仮定より $\Delta(x)=\exists\Delta(|x|)$ であるが，次の補題が成りたつ。

補題 4

(1) $$a_m(r,t)=\int_0^\infty a_m(r,s)\,\overline{a_m(t,s)}\,\Delta(s)\,s^{d-1}ds$$

(2) $$\varphi_m(tr)=\int_0^\infty \varphi_m(ts)\,\overline{a_m(r,s)}\,\Delta(s)\,s^{d-1}ds$$
$$\forall T_1\leq t\leq T_2$$

補題 5

a_m を再生核にもつヒルベルト空間を $Z_m(T_1,T_2)$ とすると。

(1) $Z_m(T_1,T_2)$ は $\mathcal{L}_2(\Delta(s)s^{d-1}ds)(\equiv Z_m)$ の閉部分空間である。

(2) $\mathcal{L}\{\varphi_m(t\,\cdot)\mid T_1\leq t\leq T_2\}=Z_m(T_1,T_2)$.

証明は省略する。次に $D=\{x\in\mathbb{R}^d \mid |x|\leq T\}$ に対する $\partial Z(D)$ の再生核を J_T として，J と同様に球面調和関数で分解して a_m に相当するものを b_m とする。

補題 6

b_mを再生核にもつZ_mの閉部分空間を∂Z_m^Tとすると。

$$\partial Z_m^T=\bigcap_{\varepsilon>0} Z_m(T-\varepsilon,\ T+\varepsilon)$$

「証明」 $f\in\partial Z_m^T$ とする。$F(x)=F(r\theta)=f(r)\,k_m^d(\theta\cdot e)$ とおくと.

$f\in\partial Z_m^T\subset Z_m$ より $F\in Z$ であるが， $x=r\theta$, $y=t\varphi$ とすると，

$$\int_{\mathbb{R}^d}F(x)\overline{J_T(y,x)}\,\Delta(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty f(r)\,\Delta(r)\,r^{d-1}dr\int_S\overline{J_T(t\varphi,r\theta)}\,k_m^d(\theta\cdot e)\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^\infty f(r)\,\overline{b_m(t,r)}\,\Delta(r)\,r^{d-1}dr\right)k_m^d(\varphi\cdot e)$$

$$=f(t)\,k_m^d(\varphi\cdot e)\qquad(\because\ f\in\partial Z_m^T)$$

$$=F(y)$$

だから $F\in\partial Z(D)$ である。なぜなら $^\forall\varepsilon>0$ に対して

$$F\in Z(\{x\in\mathbb{R}^d\mid T-\varepsilon\le|x|\le T+\varepsilon\})$$

右辺の再生核を J_ε，J_εの球面調和函数による展開で k_m^d に対応する係数を a_m^ε とすると。

$$F(y)=\int_{\mathbb{R}^d}F(x)\overline{J_\varepsilon(y,x)}\,\Delta(x)\,dx.$$

これは上と同じ計算をすることにより次の等式を示している。

$$f(t)\,K_m^d(\varphi\cdot e)=\left(\int_0^\infty f(r)\overline{a_m^\varepsilon(t,r)}\,\Delta(r)r^{d-1}dr\right)K_m^d(\varphi\cdot e)$$

だから $\quad f(t)=\int_0^\infty f(r)\overline{a_m^\varepsilon(t,r)}\,\Delta(r)r^{d-1}dr$

即ちこれは $\quad f\in Z_m(T-\varepsilon,T+\varepsilon)$ を示している。

同様に逆の議論をたどることにより $f\in\bigcap_{\varepsilon>0}Z_m(T-\varepsilon,T+\varepsilon)$ より $f\in\partial Z_m^T$ が帰結され補題6は証明された。

次に補題6を利用して ∂Z_m^T の元をきめることを考える。今は $\frac{1}{\Delta}$ が多項式の order であると仮定しているから補題2の後の注意より Z_m の元に対して $\mathcal{F}_m$ 一変換が次式で定義できる。

$$f\in Z_m\ ,\quad \varphi\in\mathcal{S}_m^d(\bar{R}_+)$$

$$\langle \mathcal{F}_m f,\varphi\rangle=\int_0^\infty f(r)(\mathcal{F}_m\varphi)(r)\,r^{d-1}dr.$$

このとき $\mathcal{F}_m f\in(\mathcal{S}_m^d(\bar{R}_+))'$ が確かめられる。

とくに $\quad f(r)=\overline{\varphi_m(tr)}$ に対しては、 $(t>0)$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_m f,\varphi\rangle&=\int_0^\infty \overline{\varphi_m(tr)}(\mathcal{F}_m\varphi)(r)\,r^{d-1}dr\\&=(2\pi)^d\varphi(t)\qquad(\text{補題 }3)\\&=\langle(2\pi)^d\delta_t,\varphi\rangle\qquad(\delta_t\text{ は }\{t\}\text{ に support をもつ dirac measure})\end{aligned}$$

であるから $\quad \mathcal{F}_m\overline{\varphi_m(t\cdot)}=(2\pi)^d\delta_t \quad$ ----- [1]

となる。

定理

$\frac{1}{\Delta}$ が多項式の order のとき., $T>0$ に対して

$$\partial Z_m^T = \left\{ f \in Z_m \;\middle|\; f(r) = \sum_{k=0}^{N} C_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr) \quad \begin{matrix} 0 \le N < +\infty \\ C_k \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$$

「証明」 まず $\partial Z_m^T = \{ f \in Z_m \mid \operatorname{supp} \mathcal{F}_m f = \{T\} \}$ を示そう。

$f \in \partial Z_m^T$ とすると. 補題6より $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$f \in Z_m(T-\varepsilon, T+\varepsilon)$$

だから f は $\{ \varphi_m(t\cdot), T-\varepsilon \le t \le T+\varepsilon \}$ の有限和 f_n で Z_m-norm で近似される。ところが[1]より $\operatorname{supp} \mathcal{F}_m f_n \subseteq \{ t \mid T-\varepsilon \le t \le T+\varepsilon \}$ であり, $\mathcal{F}_m f_n$ は $\mathcal{F}_m f$ に $(\mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+))'$ で収束する。

だから

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_m f \subseteq \{ t \mid T-\varepsilon \le t \le T+\varepsilon \}.$$

ε は任意であるから

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_m f = \{T\}.$$

となる。逆に $f \in Z_m$ が $\operatorname{supp} \mathcal{F}_m f = \{T\}$ とする。

$F(x) = F(r\theta) = f(r) k_m^d(\theta e)$ とおくと,

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) . \quad \operatorname{supp} \psi \cap \{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = T \} = \phi$$

に対して

$$\langle \hat{F}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) \hat{\psi}(x) \, dx \quad (\wedge \text{ は Fourier 変換})$$

$$= \int_0^\infty f(r) r^{d-1} dr \int_S \hat{\psi}(r\theta) K_m^d(\theta\cdot e) d\theta$$

ところが $\int_S \hat{\psi}(r\theta) K_m^d(\theta\cdot e) d\theta$

$$= (\mathcal{F}_m \varphi)(r)$$

但し、 $\varphi(t) = \int_{S'} \psi(t\omega) K_m^d(\omega\cdot e) d\omega$

$\varphi \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$ であるが、

$$|(\mathcal{F}_m \varphi)(r)| \leqq \int_S |\hat{\psi}(r\theta)| \, |K_m^d(\theta\cdot e)| d\theta$$

で、$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるから

$$|\hat{\psi}(r\theta)| \leq \frac{C_k}{1+r^k} \quad (\forall k \geqq 0)$$

だから $|(\mathcal{F}_m \varphi)(r)| \leq \dfrac{C_k'}{1+r^k} \quad (\forall k \geqq 0)$

故に補題２の(3)が適用できて $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\bar{\mathbb{R}}_+)$ である。又

$\mathrm{supp}\,\psi \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = T\} = \phi$ より $\mathrm{supp}\,\varphi \cap \{t \mid t = T\} = \phi$ であるから

$$\langle \hat{F}, \psi \rangle = \langle \mathcal{F}_m f, \varphi \rangle = 0$$

だから $F \in \partial Z(D)$ であり、これは $f \in \partial Z_m^T$ を示している。

$f \in \partial Z_m^T$ とすると今のことより $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}_m f = \{T\}$ である。

故に $\mathcal{F}_m f = \sum_{k=0}^N c_k \delta_T^{(k)}$

ところが補題３より

$$\mathcal{F}_m \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k=0}^N c_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr) \right) = \sum_{k=0}^N c_k \delta_T^{(k)}$$

$$g(r) = f(r) - \frac{1}{R_T d}\sum_{k=0}^{N} c_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr)$$

とおくと、 $\int_0^\infty g(r)(\mathcal{F}_m\varphi)(r)\, r^{d-1}\,dr = 0 \quad {}^\forall\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$

$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対しては、 $G(x) = G(r\theta) = g(r)\,K_m^d(\theta\cdot e)$ とおくと、

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x)\,\hat{\psi}(x)\,dx = \int_0^\infty g(r)(\mathcal{F}_m\varphi)(r)\, r^{d-1}\,dr$$

$$\left(\varphi(t) = \int_S \psi(t\omega)\,K_m^d(\omega\cdot e)\,d\omega \right)$$

で、$\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\overline{\mathbb{R}}_+)$ となるから

$$\langle \hat{G}, \psi \rangle = 0 \qquad {}^\forall\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

となる。ところが $G \in \mathcal{S}'$ であるから

$$G \equiv 0$$

即ち、 $g \equiv 0$ が結論される。

逆に $f \in Z_m$ が $f(r) = \sum_{k=0}^{N} c_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr)$ ならば $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}_m f = \{T\}$ であるから上の注意により $f \in \partial Z_m^T$ となるのである。

「証明終り」

「注意」 Δ' が回転不変な多項式のときは process がマルコフになり線型予測の点から $\partial Z(D)$ の再生核を計算することは興味ある事であるが、それを球面調和関数で展開して係数のつくる再生核の空間 ∂Z_m^T を考えるとき、それは定理より有限次元となっているから、理論的には $\partial Z(D)$ の再生核は計算で

まる = となる。

参考文献

[1] N. Levinson and H. P. McKean. Jr

Weighted trigonometrical approximation on $\mathbb{R}^1$ with application to the germ field of a stationary Gaussian noise.

Acta Math vol 112 (1964)

[2] H. Dym and H. P. McKean. Jr.

Application of De Branges spaces of integrals functions to the prediction of stationary Gaussian processes.

Ilinoi Journal of Mathematics (1970)

[3] M. G. Kreĭn

On a fundamental approximation problem in the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes. [redacted]. Selected transl. in Math. Stat. and Prob. 4

[4] O. I. Presnjakova

On the analytic structure of subspaces generated by random homogeneous fields.

Dokl. Akad. Nauk SSSR Том 192

[5] O. A. Orebkova

Some problems for extrapolation for random fields

Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 196.

[6] S. Kotani

$\mathbb{R}^d$-径数正規定常過程のマルコフ性について.(修士論文)

[7] T. Inui

特殊関数 (岩波全書)

「訂正」 p4 の $\widehat{S_m^d}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ の定義のところで下のように訂正.

$$\widehat{S_m^d}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \mid \sup_{0<t<+\infty} |D_t^l L_m^k t^{2p}\varphi(t)| < +\infty\}$$

$\forall k, l, p \geqq 0$.