数理解析研究所講究録
第152巻 1972年 108-118

ホモトピー近傍の存在性について

東洋大学工学部　山下正勝

§1. 序

PL topologyを研究するのにregular neighborhoodは本質的な役割を演ずる。この概念をtopological categoryに導入することができないだろうか？というのが我々の出発点であった。そうして得られたものがhomotopy neighborhoodである。

<u>定義</u>. Mをn-manifold，Yを$\mathrm{Int}\,M$内のk次元connected compact subsetとする。$\mathrm{Int}\,M$におけるYのconnectedな近傍Nが次の(1)〜(3)を満足するとき，NをYのMにおける<u>homotopy neighborhood</u>（略して h-nbd）と呼ぶ：

(1) NはMのcompact submanifoldである，

(2) $N-Y \approx \partial N \times (0,1]$ (homeo.)，

(3) YはNのdeformation retractである。

<u>定義</u>. topological manifold M^n の subset Y が <u>locally tame</u> であるとは、各点 $y \in Y$ に対して y の M における compact な近傍 U_y 及び homeomorphism $h_y : (U_y, Y \cap U_y) \approx (I^n, P_y)$ が存在することである。こゝに P_y は I^n の或る subpolyhedron をあらわす。

M を n-manifold, $Y \subset \mathrm{Int}\, M$ を k 次元 connected compact locally tame subset とする。我々はこの状態について語ることが多いので、このときの (M^n, Y^k) を (n, k) type の <u>locally tame pair</u> と呼ぶことにする。

我々は次の Conjecture を解決しようと試みた。

<u>Conjecture</u>. locally tame pair (M, Y) に対して、M における Y の h-nbd が存在する.

そして Y が simply connected の場合には一応満足できる結果を得ることができた([2])。こゝでは一般に $\pi_1(Y) \neq 1$ の場合について [2] の結果を拡張したものを報告する。尚、話を簡単にするために、M にはいつでも PL structure が入っているものとする(すなわち M が PL manifold の場合だけを取り扱う)。

主定理. (n,k) type の locally tame pair (M^n, Y^k), $n-k \geqq 3$, $n \geqq 6$, に対して, Y の M における h-nbd N が mod $H_{n-2}(\widetilde{N-Y}, \partial N)$ で存在する.

この定理を説明するのがこの報告の目的である. 詳しい証明は何れどこかで発表することとして, こゝではこの定理へ到達するまでの道筋を明らかにする.

§2. π_1-stability

定義. $\mathcal{N} = \{N_i\}$ が space pair (X, Y) の収束近傍系とは

(1) $N_i \supset N_{i+1}$,

(2) 各 N_i は Y の X における近傍である,

(3) Y の X における勝手な近傍 U に対して $\exists N_i \in \mathcal{N}$, $N_i \subset U$

となることである.

Proposition 2.1. PL manifold M と, その compact subset Y $(\subset \mathrm{Int}\, M)$ に対して, space pair $(\mathrm{Int}\, M, Y)$ の収束近傍系 $\{N_i\}$ で, 各 N_i が M の compact submanifold となるものが存在する.

証明は明らかである。実際(必要に応じてMを細かく細分して), Yと交わるsimplicesの全体を含む最小のsubcomplexの2nd derived nbdをN_iとして採用すればよい。

<u>定義</u>. separable metric space Yが<u>ANR</u>であるとは, normal space Xとそのclosed subset Aのpair (X, A)及びcontinuous map $f: A \to Y$が与えられたとき, fがAの近傍まで拡張できるときをいう。

locally tame setやmanifoldなど,我々がここで対象とするspaceはすべてANRである(O. Hanner [1]). ANRについて次の性質がなりたつ。

<u>Proposition 2.2</u>. XをANR, Yをそのclosed subsetとし, Yはその近傍Uのretractとする。このときのretraction $r: U \to Y$に対し, Yの近傍Vとhomotopy $r_t: V \to U$ (rel Y)で $V \subset U$, $r_0 = r|V$, $r_1 = \text{inclusion}$ となるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, shift left, "r_U"] & & V \arrow[ll, hook', "i"'] \arrow[dl, shift left, "r_V"] \\ & Y \arrow[ul, shift left, "i_U"] \arrow[ur, shift left, "i_V"] & \end{tikzcd}$$

さてこのProp. 2.2を,我々の便宜のために上の図式を用い

て次のように読み換えておこう。実際に我々が使うのは $k=1$ の場合だけである。

<u>Proposition 2.2′</u>. Prop. 2.2 の仮定のもとで

$$i_{U*} : \pi_k(Y, y_0) \longrightarrow \mathrm{Im}\, i_* \ (= i_*(\pi_k(U, y_0)))$$

は各 k について同型である。こゝに $y_0 \in Y$。

<u>Proposition 2.3</u>. (M^n, Y^k) を (n, k) type の locally tame pair, $n-k \geqq 3$, とする。そのとき Y の M における勝手な connected open 近傍に対して $j_* : \pi_1(U-Y) \to \pi_1(U)$ は同型である。こゝに j_* は inclusion $j : U-Y \hookrightarrow U$ によって induce される準同型である。

この証明は次の Lemma を、Y を cover する M の各座標近傍系に適用し，van Kampen の定理を有限回施こすことにより得られる。

<u>Lemma</u>. K を n-cube I^n の k 次元 subcomplex, $n-k \geqq 3$, とし、A を $|K|$ の closed subset とする。そのとき $\pi_1(\mathrm{Int}\, I^n - A) = 1$ である。

space pair (X, Y) の収束近傍系 $\mathcal{N}: N_1 \hookleftarrow N_2 \hookleftarrow \cdots$ に対して各 $N_i - Y$ が arcwise connected であれば inclusion $j_i: N_i \hookleftarrow N_{i+1}$ は自然に準同型 $\varphi_i: \pi_1(N_i - Y) \leftarrow \pi_1(N_{i+1} - Y)$ を induce する。したがって $\mathcal{N}$ に対して次の準同型の列

$$\Phi_{\mathcal{N}}: \mathrm{Im}\,\varphi_1 \leftarrow \mathrm{Im}\,\varphi_2 \leftarrow \cdots$$

を考えることができる。

<u>定義</u>. space pair (X, Y) の収束近傍系 $\mathcal{N}$ に対して $\Phi_{\mathcal{N}}$ が定義できてしかも各準同型がすべて同型であるとき $\mathcal{N}$ は <u>π_1-stable</u> であるといい, $\mathrm{Im}\,\varphi_1$ を $\pi_1(\mathcal{N})$ とあらわす。(各 i について $\pi_1(\mathcal{N}) \cong \mathrm{Im}\,\varphi_i$ である).

<u>定義</u>. manifold M とその compact subset Y $(\subset \mathrm{Int}\,M)$ を考える。$(\mathrm{Int}\,M, Y)$ の収束近傍系

$$\mathcal{N}: N_1 \hookleftarrow N_2 \hookleftarrow \cdots, \quad \bigcap_i N_i = Y$$

が π_1-stable で $\pi_1(\mathcal{N}) \cong \pi_1(Y)$, しかも各 N_i が M の connected compact submanifold であるとき, $\mathcal{N}$ を (M, Y) の <u>π_1-stable 0-nbds の列</u> という。

以上の言葉や事実をつなぎ合わせて次の定理を示すことができる。

111

定理A. (n,k) type の locally tame pair (M, Y), $n-k \geq 3$, に対して π_1-stable 0-nbds の列がとれる.

§3. 1-nbds の列

定義. manifold M とその compact subset Y $(\subset \mathrm{Int}\, M)$ を考える. π を (M, Y) の 0-nbds の列とする。このとき

(1) natural map $\pi_1(\pi) \to \pi_1(N-Y)$ は同型,

(2) $\mathrm{Bd}\, N \hookrightarrow N-Y$ から induce される map: $\pi_1(\mathrm{Bd}\, N) \to \pi_1(N-Y)$ は同型,

であるとき π を 1-nbds の列 という.

定理B. PL manifold M^n, $n \geq 5$ とその compact (locally polyhedral) subset Y $(\subset \mathrm{Int}\, M)$ の pair (M, Y) が π_1-stable 0-nbds の列をもつならば (M, Y) は 1-nbds の列をもつ。

証明は大体 Siebenmann [3] の方法でできる。1-nbd N に対して 1-handle の cancellation により都合のよい列の 1-nbd N' を構成して示される。このとき $\pi_1(\pi)$ が finitely presented であることが要求される。

§4. collar と h-nbd

<u>定義</u>. M を n-manifold, $Y \subset \operatorname{Int} M$ を k 次元 connected compact subset とする. M の subset V が次の (1)～(3) を満足するとき V を Y の回りの <u>collar</u> (in $M-Y$) という:

(1) $V \cup Y$ は Y の Int M における compact な近傍で, $V \cap Y = \emptyset$,

(2) V は $M-Y$ の connected submanifold である,

(3) $V \approx \partial V \times [0,1)$.

このとき §1 で与えた h-nbd は次のように言い直すことができる。

<u>定義</u>. N が Y の M における h-nbd とは

(1) $N-Y$ が Y の回りの collar (in $M-Y$),

(2) Y は N の deformation retract である.

実は collar の存在性と h-nbd の存在性の間には次の関係がある。

<u>定理 C</u>. M を n-manifold, Y を compact connected locally polyhedral set, $Y \subset \operatorname{Int} M$, N を Y の M における近傍とする。

そのとき inclusion $i: Y \hookrightarrow N$ が induce する $i_*: \pi_1(Y) \to \pi_1(N)$ が同型で，$N-Y$ が Y の回りの collar であれば N は Y の M における h-nbd である。

(証明)

$N-Y$ が collar であるから $N-Y \approx \partial N \times [0,1)$。したがって $H_*(N-Y, \partial N)=0$ を得る。N の double DN を考えると excision と Alexander duality から

$$H_p(N-Y, \partial N) \cong H_p(DN-Y, DN-N) \cong H^{n-p}(N, Y)$$

となり universal coefficient theorem から $H_*(N, Y)=0$ を得る。仮定から N, Y は arcwise connected, locally contractible だから，$\hat{N}$ を N の universal covering space, p をその projection とすると，$i_*: \pi_1(Y) \to \pi_1(N)$ が同型ということから $p^{-1}(Y)$ は Y の universal covering space になる。したがって $H_*(\hat{N}, \hat{Y})=0$ となる。よって J.H.C. Whitehead の定理 ([4], Th.3) を用いれば Y が N の deformation retract となることが分かる。 q.e.d.

この定理によって Y の h-nbd を求めるのに Y の回りの collar を探せばよいことになった。Siebenmann [3] は open manifold に対する collar について論じている。次の節ではその結果を引用して我々の結果へ結びつけよう。

§5. Siebenmannの結果から結論へ

M^nをPL n-manifold, $n \geq 6$, $Y \subset \mathrm{Int}\, M$はcompactとする。

定理(Siebenmann) Yが1-nbdsの列をもつならば、
1-nbdsの列 $\mathcal{N} = \{N_i\}$として

$$H_q(\widetilde{N_i - Y}, \partial \widetilde{N_i}) = 0 \quad \text{for all } q \leq n-3,\ i$$

となるものがとれる。

定理(Siebenmann) Yが1-nbdsの列 $\mathcal{N} = \{N_i\}$として

$$H_q(\widetilde{N_i - Y}, \partial \widetilde{N_i}) = 0 \quad \text{for all } q \leq n-2,\ i$$

なるものをもてば、Yの回りのcollarが存在する。

まとめると、上の1-nbdsとして $H_{n-2}(\widetilde{N_i - Y}, \partial \widetilde{N_i}) = 0$ となるようなN_iをとることができればh-nbdが存在することが分かる。すなわち次のようにまとめることができる。

主定理. (n, k) typeのlocally tame pair (M^n, Y^k), $n \geq 6$, $n-k \geq 3$, に対してYのMにおけるh-nbd Nが mod $H_{n-2}(\widetilde{N-Y}, \partial \widetilde{N})$で存在する。

References

[1] O. Hanner, Some theorems on absolute neighborhood retracts, Ark. Mat. vol 1 (1950) 389 – 408.

[2] S. Ichiraku and M. Yamashita, On neighborhoods of a 1-connected locally tame set in a PL manifold, Tensor, N.S. vol 22 (1971) 93-97.

[3] L.C. Siebenmann, Doctoral dissertation, Princeton Univ. (1965).

[4] J.H.C. Whitehead, On the homotopy type of ANR's, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 1133 – 1145.

(完)