数理解析研究所講究録
第153巻1972年39-57

新統計数値表について

電総研　戸田英雄
慶大工　竹内寿一郎

§1. 序

昭和38年10月、小内二郎氏を中心にして新統計数値表の出版が企画され，そして約2年間の予備調査の後，昭和40年4月から担当者を決め作業が開始された。昭和44年にほぼまとまり，約2年間をついやして解説と数表のチェックが行なわれた。その間，かなり大幅の修正，変更，追加，削除などがあり当初の計画より数年遅れて昭和47年4月新統計数値表の発行にこぎつけたわけである。

この数値表のねらいは，統計，QC，IE，OR，心理，生物，医学，経済など広範囲の分野で使われる統計数値表の集大成で，主に次の特長をもたせている。

（1）正規分布表などの基本的な表から，最新の多次元正規分布，最大固有根のパーセント点など，広い範囲の表を載せる。

(2)　コンピュータの利用を考えて，近似式や正確な数値の計算方法を明記する。

(3)　基本的と思われる数表を倍精度で計算するためのプログラムを載せる。

(4)　プログラムと同時に，チェック用として26桁または20桁の数値を与える。

ここでは本数値表のチェック方法といくつかの数表についてとりあげることにする。

§2.　数値表のチェックの方法について

数値を計算し，数表の作成にあたって次の4段階に分け，そこでのチェックを考慮する。

計算式 → プログラミング → アウトプット → ゲラ

(1)　計算式の誤まりは数値を計算することによって容易に発見されることが多い。ここの問題は計算時間と考え合わせた式の選択である。また数値を概算して桁落ちの少ない式を選ぶことも大切である。

(2)　プログラミングの基本的な間違いは数値を既存の数表，明らかにわかる点でチェックすれば容易に発見できるし，

異なった人がプログラムを組んで再計算しても発見できる。ここではFORTRANによる倍精度計算に際して次のようなミスが目立った。①倍精度変数の宣言もれ，②定数にD+0をつけなかった，（桁数の多い定数はD+0がなくとも自動的に倍精度定数とみなすシステムもあった），③ベキ乗の計算，たとえばA**BにおいてA，Bともに倍精度であっても結果が単精度となってしまう計算機があった，④FLOAT(K)，X=XX（Xは倍精度，XXは単精度）をうっかり使ってしまった，など。これらは計算途中で一回でも生起すると結果はすべて単精度となってしまうので十分注意しなければならない。この件に関するチェックは桁数の多い既存の数表が最もよいのであるが，実際にはその様な表が少ないので困難である。そこで明らかにわかる点でチェックするのが精一杯ではあるが最もよい方法であった。

(3) 計算機内部での計算ミスはまったく生じなかった。アウトプット時のまるめの誤まりが数ヶ所発見された。この原因は次のようなことであった。1.245となる値の計算機内部表示は10進で，1.24499……7または1.24500…2となっている。但し最終桁の7，2は計算誤差により生じた値である。このとき小数第3位を4捨5入するとすれば1.25あるいは1.24というアウトプットとなる。アウトプットだけをながめても

このちがいは発見できない（計算機やシステムのちがいでどうなるかわからない）。 本数値表ではこのような原因にもとづくまるめによる最終桁のちがいは，4捨5入のもつ意味から考えて，1.25も1.24も双方正しい値とみなして，計算機の上で自動的に4捨5入をさせたのである。

(4) ゲラのチェック方法にはこれまでいろいろな方法が考えられているが，本数値表では最終的にサムチェックという方法を採用した。この方法はアウトプット，ゲラそれぞれの行和・列和を計算し，合計値によりチェックする方法である。差分法によるチェックも考えたのであるが，引数が等間隔でない数表が多く，またまるめの誤まりをも含む最終桁のチェックに重点をおいたので，ここでは用いなかったのである。

§3. 本数値表（統計数値表JSA-1972）のチェック

最終的に行なわれるサムチェックの前に誤植を減らしておく必要があることはいうまでもない。そこで本数値表では，1校で4人の人が独立に校正し，2校で4人，3校で4人と延べ12人の人が独立に照合を行なって，誤植による誤りに備えたのである。そしてサムチェックのための合計計算は時間と費用の関係もあってゲラは主に加算器または算盤でたて計，よこ計を計算，アウトプットはできるだけ再計算によりたて計

よこ計を計算した。この再計算は前述（2）のプログラミングのチェックおよび収束条件をきつくした場合の数値のチェックをも兼ねさせたのである。再計算でくいちがいの生じた数表については慎重に検討した上，再々計算を行なったのである。

その結果，照合で見のがされていた数字の前後のいれちがいや，アウトプットの見にくい数字が原因で生じた誤植が発見されたのである。特に2校もしくは3校後体裁がかえられた数表に誤まりが多かったのである。収束条件をきつくしたために異なった値を得るにいたったケースもあった。

時間および費用を考えたうえの結論として，数値表の計算結果は必ずカードにアウトプットしておき，そのカードから行和，列和をも含めてプリントさせるプログラムをつくり，数部のリストをとりそれを元原稿とすること。次にゲラから数値をパンチカードにして，同じプログラムを使用して行和列和を計算し，それを計算機上で比較させるとよい。

§4. Studentized Range のパーセント点の表の作成

本数値表の中から比較的手間のかかった数表であるstudentized range をとりあげることにする。

(1) Studentized range のパーセント点

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ n の標本の範囲を R，これと

独立で自由度νのσの推定量をsとするとき，$q=R/s$をstudentized rangeとよぶ。このパーセント点$q_\alpha(n,\nu)$はRの確率密度を$f(R)$とすると，

$$P_r[R/s \leqq q_\alpha]=\frac{2}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty s^{\nu-1}e^{-\frac{1}{2}\nu s^2}\int_0^{q_\alpha s}f(R)\,dR\,ds=1-\alpha \qquad (4.1)$$

を満たすq_αによって定義される。

ここで
$$f(R)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_x^{x+R}\phi(t)\,dt\right]^{n-2}\phi(x)\,\phi(x+R)\,dx \qquad (4.2)$$

すなわち標準正規分布からの大きさnの標本における範囲の密度関数であり，

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (4.3)$$

である。

q_αの表はPearson-Hartley (1943)の数値表にみられ，その後May (1952)，Hartley (1953), Pachares (1959)が修正しているが，Harter (1960)によりかなり詳しく計算されている。ここでは更に検討を加えた結果，更に修正した詳しい数値を算出したのである。

(2) q_αの計算法

数値積分で(4.1)を計算しq_αを求めるということは，4重積分のパーセント点を求めるというぼう大な計算量になること

が予想される。HarterはNewton-Cotesの7点積分公式により適当な間隔で，各段階で積分値を求め，その数値を記憶させておき(4.1)の積分値をgの値に対して計算し，かなり大きな表を作成した。そしてAitkenの逆補間によりパーセント点g_αをもとめている。我々は逆補間を用いず試行錯誤法でパーセント点をもとめるという方針から出発したので，数値積分はGauss型を使うことにし，なるべく数値積分をするという段階を減ずるように工夫したのである。

まず$\phi(x)$の積分にはいろいろな積分を試みた結果次式を用いることにした。

$$Q(x)=\int_x^\infty \phi(x)\,dx=\phi(x)\left[\frac{1|}{|x}+\frac{1|}{|x}+\frac{2|}{|x}+\cdots+\frac{k|}{|x}+\cdots\right] \qquad x \geqq 3.3 \tag{4.4}$$

$$Q(x)=\frac{1}{2}-\phi(x)\left[\frac{x|}{|1}-\frac{x^2|}{|3}+\frac{2x^2|}{|5}-\frac{3x^2|}{|7}+\cdots+(-1)^k\frac{kx^2|}{|2k+1}+\cdots\right] \qquad x<3.3 \tag{4.5}$$

これらは計算速度と精度とを合せ考えると最も効率がよかった。ここでkは最大28でよく，xが3.3に比べはなればはなれる程kは更に小さくてよい。(戸田・清水・竹内(1968))
このとき倍精度(15桁)演算で最大誤差10^{-13}である。つぎに

$$\Pr[R \leqq R_0]=n(n-1)\int_0^{R_0}\int_{-\infty}^{\infty}[Q(x)-Q(x+R)]^{n-2}\phi(x)\phi(x+R)\,dx\,dR \tag{4.6}$$

なる範囲の分布関数は2重積分なので，変形して

$$Pr[R \leqq R_0] = n\int_0^\infty \phi(x)\left[\{Q(x)-Q(x+R_0)\}^{n-1}+\{Q(-x)-Q(-x+R_0)\}^{n-1}\right]dx \tag{4.7}$$

となり，1つの積分でよいことになる。したがって(4.1)は2重積分となり，そのパーセント点を求める計算におきかえることができる。すなわち

$$\begin{aligned} Pr[R/s \leqq q_\alpha] &= \frac{2}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty s^{\nu-1}e^{-\frac{1}{2}\nu s^2}F(q_\alpha s)\,ds \\ &= C\int_0^\infty s^{\nu-1}e^{\frac{1}{2}(1-s^2)}F(q_\alpha s)\,ds \end{aligned} \tag{4.8}$$

ただし

$$F(q_\alpha s) = Pr[R \leqq q_\alpha s], \quad C = \frac{2e^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}$$

(4.8)の第2式はνに対しCの値が大きく変化しないように変形したものである。

(4.7), (4.8)はともに積分範囲が$(0,\infty)$であり，$e^{-\frac{x^2}{2}}$が被積分関数に入っているので変形すれば，Laguerre-Gaussの積分公式により計算できるが，そのための積分の分点と重みを用意しておかねばならない。Legendre-Gaussの数値積分は分点数が不足である場合，積分範囲を分割することによりいくらでも分点数を形式的に増やすことができるので，∞の代りに有限の値におきかえLegendre-Gaussの公式によることにした。

この方針から(4.7)を10^{-12}の精度で計算するために，∞の

代りの積分上限値 l_0 とその時の分点数 N を決定することにした。そこで (4.7) の被積分関数

$$h(x,R)=\phi(x)\left[\{Q(x)-Q(x+R)\}^{n-1}+\{Q(-x)-Q(-x+R)\}^{n-1}\right] \quad (4.9)$$

の値を $R=0.5(0.5)11$, $n=2(1)6(2)10, 15, 20, 30$ について計算しその値が 10^{-13} となるところをもって上限値とまず定めた。その後のチェックで

$$\int_{l_0}^{20} n\phi(x)\left[\{Q(x)-Q(x+R)\}^{n-1}+\{Q(-x)-Q(-x+R)\}^{n-1}\right]dx \quad (4.10)$$

の値が 0.5×10^{-12} 以下となる $l_0(R,n)$ の値と先にまず求めた値と比較するとほぼ等しく，最大 0.2 のちがいであった。(4.10) が 0.5×10^{-12} 以下となる $l_0(R,n)$ および (4.7) の積分上限を $l_0(R,n)$ としたときの積分誤差が 10^{-12} 以下となる分点数 N は次ページの表 1 のとおりである。

使用した分点数は 5(1)35, 40, 48 で，積分誤差の算出にあたっては真値として 48 点積分値を採用した。$N=5(1)35$ の分点と重みは山下 (1964) により，$N=40, 48$ は Handbook of Math. Func. and Tables によった。(4.7) の積分が 10^{-12} の精度で計算されたのであるが，このとき計算時間は 40 点積分で，HITAC 8410 (電総研・永田町) によると約 3〜4 秒を要する。

次に (4.8) の積分を考える。(4.1) の被積分関数に比べ，

表 1 $l_0(R, n)$ および分点数 N

R \ n	2	N	3	N	4	N	5	N	6	N	8	N	10	N	15	N	20	N	30	N
0.5	5.3	17	4.3	15	3.6	16	3.2	16	2.8	13	2.3	12	1.9	10	1.2	5	0.7	5	0.7	5
1.0	5.5	17	4.6	17	4.0	17	3.6	17	3.3	16	2.8	16	2.5	15	2.0	12	1.6	10	0.8	5
1.5	5.8	17	4.9	18	4.4	18	4.0	19	3.7	18	3.3	19	3.0	18	2.5	17	2.2	15	1.7	12
2.0	6.0	18	5.2	18	4.7	18	4.4	19	4.1	18	3.7	20	3.4	20	2.9	20	2.6	19	2.2	18
2.5	6.2	18	5.5	19	5.0	19	4.7	19	4.5	18	4.1	20	3.8	20	3.4	21	3.1	22	2.7	21
3.0	6.4	18	5.8	19	5.3	20	5.0	20	4.8	19	4.5	21	4.2	21	3.8	21	3.5	22	3.2	22
3.5	6.5	18	6.0	20	5.6	20	5.4	20	5.2	20	4.8	22	4.6	20	4.2	22	4.0	23	3.6	24
4.0	6.7	18	6.2	20	5.9	20	5.7	21	5.5	21	5.2	22	5.0	22	4.6	23	4.4	25	4.1	26
4.5	6.8	18	6.5	20	6.2	20	6.0	22	5.8	22	5.5	22	5.3	24	5.0	24	4.8	26	4.5	27
5.0	7.0	18	6.7	21	6.4	21	6.2	22	6.1	22	5.8	24	5.7	24	5.4	26	5.2	27	4.9	29
5.5	7.1	17	6.8	21	6.6	21	6.5	23	6.4	23	6.2	24	6.0	25	5.7	27	5.5	28	5.3	30
6.0	7.2	17	7.0	21	6.8	22	6.7	23	6.6	23	6.4	24	6.3	26	6.1	28	5.9	29	5.7	32
6.5	7.3	17	7.1	22	7.0	22	6.9	24	6.8	23	6.7	25	6.6	26	6.4	29	6.3	31	6.0	33
7.0	7.4	17	7.2	22	7.2	22	7.1	24	7.0	24	6.9	25	6.8	27	6.7	29	6.6	31	6.4	34
7.5	7.4	17	7.3	22	7.3	22	7.2	24	7.2	24	7.1	26	7.1	27	7.0	30	6.9	32	6.7	40
8.0	7.5	17	7.4	22	7.4	22	7.3	24	7.3	24	7.3	26	7.3	28	7.2	30	7.1	34	7.0	40
8.5	7.5	17	7.4	22	7.4	22	7.4	24	7.4	24	7.4	26	7.4	28	7.4	31	7.3	34	7.3	40
9.0	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.4	25	7.5	26	7.5	28	7.5	31	7.5	34	7.5	40
9.5	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.6	31	7.6	34	7.6	40
10.0	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.6	31	7.7	34	7.7	40
10.5	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.7	31	7.7	34	7.7	40
11.0	7.5	17	7.5	22	7.5	23	6.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.7	31	7.7	34	7.7	40

(4.8) の被積分関数

$$g(s;\nu)=s^{\nu-1}e^{\frac{1}{2}\nu(1-s^2)} \qquad (4.11)$$

はわりあいおとなしい関数になる。Cは$\nu \leqq 120$に対し6.2以下となり，(4.11)の最大値も桁ちがいに小さくはならない。$s=0(0.01)10.0$における(4.11)の値を各νについて計算して最大値をみつけると，$\nu=10$のとき$s=0.95$で1.03，$\nu=120$のとき$s=1.0$で1.0，$\nu \leqq 120$に対してとにかく(4.11)の最大値は1以上である。

$F(gs) \leqq 1$であることから，(4.8)を数値積分した値が0.95のような大きい値になるためには，$g(s;\nu)$と$F(gs)$が大きい

値同士の積となっている筈である。したがって $g(s;\nu)$ が 10^{-10} ぐらい小さければ，それに $F(gs)$，C が乗ぜられ，その和をとっても結果に及ぼす影響はごくわずかであると考えられる。そこで $g(s;\nu)$ が 10^{-10} 以下となる小さい方の s を m_0，大きい方の s を m_0' とおいて，それを (4.8) の積分における積分下限，および積分上限と定めた。表2は m_0，m_0' を各 ν について求めたものである。

表 2　m_0 および m_0' の表

ν	下限 m_0	上限 m_0'	ν	下限 m_0	上限 m_0'
1	0.0	7.19	12	0.05	2.65
2	0.0	5.30	14	0.07	2.52
3	0.0	4.46	16	0.10	2.42
4	0.0	3.97	18	0.12	2.33
5	0.0	3.64	20	0.14	2.26
6	0.0	3.39	24	0.19	2.14
7	0.0	3.20	30	0.24	2.01
8	0.01	3.05	40	0.31	1.87
9	0.02	2.93	60	0.42	1.70
10	0.03	2.82	120	0.57	1.49

したがって (4.8) は次の式で計算されることになる。

$$\Pr[R/s \leq g] = C\int_{m_0}^{m_0'} g(s;\nu)F(gs)\,ds \qquad (4.12)$$

ここで $F(11)=0.99999\ 99999\ 966$ であることから $R \geqq 11$ に対して $F(R) \fallingdotseq 1$ とみなせば

$$\Pr[R/s \leq g] = C\left[\int_{m_0}^{\min(\frac{11}{g},\,m_0')} g(s;\nu)F(gs)\,ds + \int_{\min(\frac{11}{g},\,m_0')}^{m_0'} g(s;\nu)\,ds\right] \qquad (4.13)$$

で計算するとよい。
第2項の数値積分は第1項に比べ20倍以上の速さであるから，分点数は多めにとっても計算速度はあまりかわらない。(4.13)の結果が約0.99になるようなqに対して第1項を25点で積分すると，積分誤差はnの小さいところで10^{-12}，nの大きいところで10^{-9}～10^{-10}であった。また約0.95になるようなqに対しては，25点積分では$n=30$, $\nu=5$のとき3×10^{-9}の積分誤差となるので，28点積分で計算することにした。（このときの積分誤差は10^{-12}～10^{-11}であった。）更にいろいろ検討した結果，第1項の計算を25点積分でほぼ0.3になるようなqに対して計算を行なったときの積分誤差は，n, νについて多少のちがいはあるが10^{-7}ぐらいである。このことからqの下側パーセント点の計算に関しては工夫が必要であると思われる。　なお，第2項は28点積分で計算した。

さて，(4.13)により10^{-9}～10^{-10}の精度でstudentized rangeの分布関数（ただし0.95～0.99の付近だけ）が求められたのであるから，あとは適当に初期値を入れて試行錯誤法によりパーセント点を求めることになる。1つの分布関数の値を求めるのに長いものでHITAC 8410によると2～3分を要したのである。　幸いにしてHarter (1960)の求めた有効4桁のパーセント点があるのでそれを使用し，さらに詳しい値を計

算したのが付表である。これはパーセント点で10^{-6}まで正確（分布関数では10^{-8}）に出して小数第5位を4捨5入したもので，総計算時間は約48時間を要した。

（3）数表の検討

Harterは$\alpha=0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999$；$\nu=1(1)20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$；$n=2(1)20(2)40(10)100$について有効数字4桁計算している。そしてそのコメントで4桁目に1以内の誤差があるとしている。付表とHarterの表では$\alpha=0.05$で20箇所，$\alpha=0.01$で31箇所4桁目のちがいがみうけられるが，いずれも4桁目の±1以内の誤差である。付表がどこまで正しいかチェックするために$n=2$のところで確かめてみた。$n=2$の場合，(4.1)は簡単に変数変換により，

$$\Pr[R/s \leqq q] = \frac{2}{B(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})}\int_0^{\tan^{-1}\frac{q}{\sqrt{2\nu}}} \cos^{\nu-1} u \, du \qquad (4.14)$$

となり，とくに$\nu=1$のとき

$$\Pr[R/s \leqq q] = \frac{2}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \tan^{-1}\frac{q}{\sqrt{2}} \qquad (4.15)$$

で正確に求められる。また(4.14)からこの式は自由度νのt分布関数であることがわかる。すなわち

$$q_\alpha(\nu, n=2) = \sqrt{2}\, t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu) \qquad (4.16)$$

によりパーセント点が正確にしかも容易に計算することができる。ここで $t_{\alpha/2}(\nu)$ は自由度 ν の t 分布の上側 $100\cdot\frac{\alpha}{2}$ パーセント点である。表3，4は付表を作成するために計算した詳しい値と，(4.16) による正確な値，それに Harter の値を比較するためのものである。

表 3 $n=2,\ \alpha=0.01$ 真値との比較

ν	計算値	真値	Harter	ν	計算値	真値	Harter
1	90.0242273	90.0242267	**90.03**	12	4.31977216	4.31977131	4.320
2	14.0358480	14.0358479	14.04	14	4.20989069	4.20989137	4.210
3	8.26029362	8.26029316	**8.261**	16	4.13060992	4.13060898	4.131
4	6.51117393	6.51117341	**6.512**	18	4.07072864	4.07072956	4.071
5	5.70231119	5.70231129	5.702	20	4.02391816	4.02391801	4.024
6	5.24309576	5.24309500	5.243	24	3.95546910	3.95546978	**3.956**
7	4.94901601	4.94901674	4.949	30	3.88908099	3.88908115	3.889
8	4.74523469	4.74523427	**4.746**	40	3.82468243	3.82468297	3.825
9	4.59596163	4.59596150	4.596	60	3.76220909	3.76220833	3.762
10	4.48202772	4.48202840	4.482	120	3.70159244	3.70159248	3.702

表 4 $n=2,\ \alpha=0.05$ 真値との比較

ν	計算値	真値	Harter	ν	計算値	真値	Harter
1	17.9692868	17.9692871	17.97	12	3.08130740	3.08130665	**3.082**
2	6.08486920	6.08486984	6.085	14	3.03318652	3.03318642	3.033
3	4.50065863	4.50065873	4.501	16	2.99799821	2.99799883	2.998
4	3.92648640	3.92648632	**3.927**	18	2.97115304	2.97115244	2.971
5	3.63535181	3.63535170	3.635	20	2.94999688	2.94999780	2.950
6	3.46045554	3.46045593	**3.461**	24	2.91879362	2.91879334	2.919
7	3.34408287	3.34408369	3.344	30	2.88820950	2.88820941	2.888
8	3.26118230	3.26118232	3.261	40	2.85823320	2.85823223	2.858
9	3.19917421	3.19917334	3.199	60	2.82884815	2.82884831	2.829
10	3.15106450	3.15106418	3.151	120	2.80004514	2.80004443	2.800

我々の求めた値を小数点以下6桁目を4捨5入してまるめられた小数点以下5桁までの値は，1箇所 ($\alpha=0.05,\ \nu=120$) を除いて完全に真値に一致する。したがって小数点以下4桁の数字になるようにまるめれば十分であろう。真値が10以上のところでは1桁ないし2桁よけいに真値に合うように試行

錯誤をくり返しているので，10^{-6}の絶対精度をもっているのである。目標精度として確率分布で10^{-8}，パーセント点で10^{-6}（試行錯誤に時間をかければ10^{-9}まで可能）になるように，試行錯誤法で求めたのであるが，これが満たされていることが$n=2$では確認された。

次にHarterの数値と著しく離れているパラメタのところを選んで，Harterの行なった計算法に検討を加えてみる。

$\alpha=0.05$，$n=20$，$\nu=7$のパーセント点はHarterによると7.170付表では7.1691であり小数点以下4桁目が少なくとも4以上はちがっていることになる。そこで，まずHarterの計算したstudentized rangeの確率分布関数表から$q=5.0(0.2)6.0(0.4)10.0(1.0)14.0$の20の点をとり，級の6桁の数値を使ってNevilleの補間法により$q=7.169(0.0001)7.170$における値を計算してみた。その結果われわれの数値に近いことを確認したのである。勿論われわれの計算した9桁の数値を用いても同様であった。

補間による確率積分（$n=20$，$\nu=7$）

q	Harter の 6 桁使用	われわれの 9 桁使用
7.1691	0.949999065	0.949998696
7.1692	0.950002552	0.950002182

確率に比べqが大きく変化するので，こんどは$1/q$に関して同様の補間を試みた結果，いずれもわれわれの数値に近い値を確認したのである。

q	Harter の6桁使用	われわれの9桁使用
7.1691	0.949999282	0.949998696
7.1692	0.950002767	0.950002182

さらに，$\alpha=0.01$，$n=2$，$\nu=1$におけるパーセント点に対してHarterの計算法を試みてみた。この点は(4.16)から正確に値が求められ，Harterのは90.03であり，明らかに4桁目が1少ないことがわかるのである。（われわれの値では90.0242で真値に一致している） そこでHarterの求めた6桁の数値から（$q=40(5)135$における20個の点を使って）$q=90.02(0.001)90.03$についてNevilleの補間法で求めてみた。このとき同様にわれわれの9桁の数値からも求め，表5を得た。

表 5　補間による確率積分（$n=2$, $\nu=7$）

q	Harter の6桁使用	われわれの9桁使用
90.021	0.989999340	0.989999642
90.022	0.989999452	0.989999753
90.023	0.989999563	0.989999864
90.024	0.989999674	0.989999975
90.025	0.989999786	0.990000086
90.026	0.989999897	0.990000197
90.027	0.990000009	0.990000308
90.028	0.990000012	0.990000419
90.029	0.990000231	0.990000530

ここでは $1/g$ に関しての補間をとったのである。この表によると，Harterの6桁の数値からは補間により g の値が小数点以下2桁まで正確にとらえられないことがわかる。

(4) 数表の補間

もっとも大きく数値がかわる $\nu=1$，引数の間隔の広い $n=21\sim29$ についてNevilleの補間法で計算してみた。n のままで補間すると点を多くとってもせいぜい3桁しか合わないが，$1/n$ で補間すると4点，すなわち30, 20, 15, 10をとることにより，Harterの値と比べ4桁目が1ないし2ちがうだけの値を得ることができる。

また ν に関して補間するとき，もっとも変化のはげしい $n=30$ では，6〜7点を使って補間すれば，Harterの値にごく近い値を得ることができるが，$1/\nu$ に関して補間するとわずか3点で，Harterの値と比べ4桁目で1ないし2だけちがう値を得る。とくに $\nu=19$ では $1/\nu$ に関して線型補間でも十分であることがわかった。

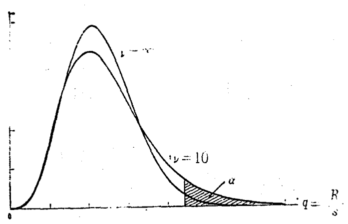
参考文献

1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1964) : Handbook of Mathematical Functions. (National Bureau of Standards) pp. 916—924.

2) Harter, H.L. (1960) : Tables of range and studentized range, Ann. Math. Statist. Vol. 31 pp. 1122—1147.

3) Harter, H.L., Clemm, D.S. and Guthrie, E.H. (1959) : The Probability Integrals of the Range and of the Studentized Range-Probability Integral, Percentage Points of the Studentized Range ; Critical Values for

付表 Studentized Range のパーセント点の表



α=0.05

ν \ n	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	17.9693	26.9755	32.8187	37.0815	40.4076	45.3973	49.0710	55.3607	59.5576	65.1490
2	6.0849	8.3308	9.7980	10.8811	11.7343	13.0273	13.9885	15.6503	16.7688	18.2690
3	4.5007	5.9096	6.8245	7.5017	8.0371	8.8525	9.4620	10.5222	11.2400	12.2073
4	3.9265	5.0402	5.7571	6.2870	6.7064	7.3465	7.8263	8.6640	9.2334	10.0034
5	3.6354	4.6017	5.2183	5.6731	6.0329	6.5823	6.9947	7.7163	8.2080	8.8747
6	3.4605	4.3392	4.8956	5.3049	5.6284	6.1222	6.4931	7.1428	7.5864	8.1889
7	3.3441	4.1649	4.6813	5.0601	5.3591	5.8153	6.1579	6.7586	7.1691	7.7275
8	3.2612	4.0410	4.5288	4.8858	5.1672	5.5962	5.9183	6.4831	6.8694	7.3953
9	3.1992	3.9485	4.4149	4.7554	5.0235	5.4319	5.7384	6.2758	6.6435	7.1444
10	3.1511	3.8768	4.3266	4.6543	4.9120	5.3042	5.5984	6.1141	6.4670	6.9480
12	3.0813	3.7729	4.1987	4.5077	4.7502	5.1187	5.3946	5.8780	6.2089	6.6600
14	3.0332	3.7014	4.1105	4.4066	4.6385	4.9903	5.2534	5.7139	6.0290	6.4586
16	2.9980	3.6491	4.0461	4.3327	4.5568	4.8962	5.1498	5.5932	5.8963	6.3097
18	2.9712	3.6093	3.9970	4.2763	4.4944	4.8243	5.0705	5.5006	5.7944	6.1950
20	2.9500	3.5779	3.9583	4.2319	4.4452	4.7676	5.0079	5.4273	5.7136	6.1039
24	2.9188	3.5317	3.9013	4.1663	4.3727	4.6838	4.9152	5.3186	5.5936	5.9682
30	2.8882	3.4864	3.8454	4.1021	4.3015	4.6014	4.8241	5.2114	5.4750	5.8335
40	2.8582	3.4421	3.7907	4.0391	4.2316	4.5205	4.7345	5.1056	5.3575	5.6996
60	2.8288	3.3987	3.7371	3.9774	4.1632	4.4411	4.6463	5.0011	5.2412	5.5663
120	2.8000	3.3561	3.6846	3.9169	4.0960	4.3630	4.5595	4.8979	5.1259	5.4336
∞	2.7718	3.3145	3.6332	3.8577	4.0301	4.2863	4.4741	4.7959	5.0117	5.3013

α=0.01

ν \ n	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	90.0242	135.0407	164.2577	185.5753	202.2097	227.1663	245.5416	277.0034	297.9972	325.9682
2	14.0358	19.0189	22.2937	24.7172	26.6290	29.5301	31.6894	35.4261	37.9435	41.3221
3	8.2603	10.6185	12.1695	13.3243	14.2407	15.6410	16.6908	18.5219	19.7648	21.4429
4	6.5112	8.1198	9.1729	9.9583	10.5832	11.5418	12.2637	13.5298	14.3939	15.5662
5	5.7023	6.9757	7.8042	8.4215	8.9131	9.6687	10.2393	11.2436	11.9318	12.8688
6	5.2431	6.3305	7.0333	7.5560	7.9723	8.6125	9.0966	9.9508	10.5378	11.3393
7	4.9490	5.9193	6.5424	7.0050	7.3730	7.9390	8.3674	9.1242	9.6454	10.3586
8	4.7452	5.6354	6.2038	6.6248	6.9594	7.4738	7.8632	8.5517	9.0265	9.6773
9	4.5960	5.4280	5.9567	6.3473	6.6574	7.1339	7.4945	8.1323	8.5726	9.1767
10	4.4820	5.2702	5.7686	6.1361	6.4275	6.8749	7.2133	7.8121	8.2256	8.7936
12	4.3198	5.0459	5.5016	5.8363	6.1011	6.5069	6.8136	7.3558	7.7305	8.2456
14	4.2099	4.8945	5.3215	5.6340	5.8808	6.2583	6.5432	7.0466	7.3943	7.8726
16	4.1306	4.7855	5.1919	5.4885	5.7223	6.0793	6.3483	6.8233	7.1512	7.6023
18	4.0707	4.7034	5.0942	5.3788	5.6028	5.9443	6.2013	6.6546	6.9673	7.3973
20	4.0239	4.6392	5.0180	5.2933	5.5095	5.8389	6.0865	6.5226	6.8232	7.2366
24	3.9555	4.5456	4.9068	5.1684	5.3735	5.6850	5.9187	6.3296	6.6123	7.0008
30	3.8891	4.4549	4.7992	5.0476	5.2418	5.5361	5.7563	6.1423	6.4074	6.7710
40	3.8247	4.3672	4.6951	4.9308	5.1145	5.3920	5.5989	5.9606	6.2083	6.5471
60	3.7622	4.2822	4.5944	4.8178	4.9913	5.2525	5.4466	5.7845	6.0149	6.3290
120	3.7016	4.1999	4.4970	4.7085	4.8722	5.1176	5.2992	5.6138	5.8272	6.1168
∞	3.6428	4.1203	4.4028	4.6028	4.7570	4.9872	5.1566	5.4485	5.6452	5.9106

Duncan's New Multiple Range Test. (ASTIA Document AD231733).

4) Hartley, H.O. (1953) : Tables of percentage points of the "studentized" range, Biometrika Vol. 40 pp. 236.

5) May, J.M. (1952) : Extended and corrected tables of the upper percentage points of the "studentized" range, Biometrika Vol. 39 pp. 192—193.

6) Pachares, J. (1959) : Tables of the upper 10% points of the studentized range, Biometrika Vol. 46 pp. 461—467.

7) Pearson, E.S. and Hartley, H.O. (1943) : Tables of the probability integral of the 'studentized' range, Biometrika Vol. 33 pp. 89—99.

8) 戸田・清水・竹内 (1968) : 統計分布と電子計算機 (1), (2), (3) 正規分布関数の展開式および近似式の検討 (1), (2), (3), 標準化と品質管理 Vol. 21 9月号 pp. 59—64, 11月号 pp. 45—52, 12月号 pp. 35—42.

9) Tukey, J.W. (1951) : Quick and dirty method in statistics, Part II, simple analysis for standard designs, Proc. 5th Ann. Convention Amer. Soc. for QC, pp. 187—197.

10) 山下真一郎 (1964) : Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定, 情報処理 Vol. 5 pp. 206—215.