数理解析研究所講究録
第153巻 1972年 256-264

一階非線型偏微分方程式の初期値問題

早大 理工 小島清史

§1. 序

非線形双曲型方程式の初期値問題の解は，弱解の範囲では一意に定まらない。そこで，一意に解を定めるために，通常エントロピー条件をつけ加えている。Kružkov [1] は，初期値問題

$$(1) \qquad u_t + \sum_{i=1}^{n} (f_i(u))_{x_i} = 0 \qquad f_i \in C^1$$

$$(2) \qquad u(0,x) = u_0(x). \qquad u_0 \in L^\infty(R^n)$$

の generalized solution を，つぎのように定義した。すなわち有界可測関数 $u(t,x)$ が (1) (2) の generalized solution であるとは，つぎの2つの条件を満たす場合をいう。

(i). 任意の定数 k と任意の $\varphi(t,x) \in C_0^1(\Pi_T)$, $\Pi_T = [0,T] \times R_n$ $\varphi(t,x) \geqq 0$ に対して，

$$(3) \quad \iint_{\Pi_T} \left\{ |u-k|\varphi_t + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(u-k)\,[f_i(u) - f_i(k)]\,\varphi_{x_i} \right\} dx\,dt \geqq 0$$

(ii). 測度0の集合 $N \subset [0,T]$ が存在して、$u(t,x) \in L^\infty(R^n)$ for any $t \in [0,T]-N$, かつ、任意の球 $K_R = \{x; |x| \leq R\}$ に対して、

(4) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in[0,T]-N}} \int_{K_R} |u(t,x) - u_0(x)|\, dx = 0 .$$

(3) において, $k = \pm \sup|u(t,x)|$ とおけば gen. sol. u は (1) の弱解であることが分かる。Kružkov は, gen. sol. の一意性と存在を示した。

ここでは、(1)(2) に対する差分近似解が、上で述べた (1),(2) の gen. sol に収束することを示す。

§2、差分方程式.

簡単のために, $n=2$ とする。すなわち, つぎのような初期値問題に対する差分近似を考える。

$$\begin{cases} (5)\quad u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \qquad f, g \in C^1 \\ (6)\quad u(0,x,y) = u_0(x,y) \in L^\infty \end{cases}$$

さて、つぎのような記号を導入する。

$$u_{\ell,m}^n = u(nr, \ell p, mq) \qquad f_{\ell,m}^n = f(u_{\ell,m}^n) \qquad g_{\ell,m}^n = g(u_{\ell,m}^n)$$

(5)(6) に対する差分近似として、つぎのようなものを考える。

$$(7)\quad \frac{u^{n+1}_{\ell,m}-\overline{u^n_{\ell,m}}}{r}+\frac{f^n_{\ell+1,m}-f^n_{\ell-1,m}}{2p}+\frac{g^n_{\ell,m+1}-g^n_{\ell,m-1}}{2q}=0$$

ここで $\overline{u^n_{\ell,m}}=\frac{1}{4}(u^n_{\ell+1,m}+u^n_{\ell-1,m}+u^n_{\ell,m+1}+u^n_{\ell,m-1})$ である。

補題 1、 $\sup|u^0_{\ell,m}|=M$, $\frac{r}{p}A<\frac{1}{2}$, $\frac{r}{q}B<\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow\quad |u^n_{\ell,m}|\leqq M$

ただし、 $A=\sup\limits_{|v|\leqq M}|f'(v)|$, $B=\sup\limits_{|v|\leqq M}|g'(v)|$

証明）(7)より

$$(8)\quad u^{n+1}_{\ell,m}=\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2p}\alpha^n_{\ell,m}\right)u^n_{\ell+1,m}+\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{2p}\alpha^n_{\ell,m}\right)u^n_{\ell-1,m}$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2q}\beta^n_{\ell,m}\right)u^n_{\ell,m+1}+\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{2q}\beta^n_{\ell,m}\right)u^n_{\ell,m-1}$$

ここで

$$\alpha^n_{\ell,m}=\begin{cases}(f^n_{\ell+1}-f^n_{\ell-1,m})/(u^n_{\ell+1,m}-u^n_{\ell-1,m}) & u^n_{\ell+1,m}\neq u^n_{\ell-1,m}\\ f'(u^n_{\ell+1,m}) & u^n_{\ell+1,m}=u^n_{\ell-1,m}\end{cases}$$

$$\beta^n_{\ell,m}=\begin{cases}(g^n_{\ell,m+1}-g^n_{\ell,m-1})/(u^n_{\ell,m+1}-u^n_{\ell,m-1}) & u^n_{\ell,m+1}\neq u^n_{\ell,m-1}\\ g'(u^n_{\ell,m+1}) & u^n_{\ell,m+1}=u^n_{\ell,m-1}\end{cases}$$

である。 ここで $\sup\limits_{\ell,m}|u^n_{\ell,m}|\leqq M$ とすると仮定より $u^n_{\ell\pm1,m}$ $u^n_{\ell,m\pm1}$ の係数は正で和が 1 したがって $|u^{n+1}_{\ell,m}|\leqq M$

補題 2. $u^n_{\ell,m;h_1,h_2}=u^n_{\ell+h_1,m+h_2}-u^n_{\ell,m}$ とおくとき、

$$\sum_{\substack{|\ell|\leqq N_1\\|m|\leqq N_2}}|u^n_{\ell,m;h_1,h_2}|pq\leqq\sum_{\substack{|\ell|\leqq N_1+n\\|m|\leqq N_2+n}}|u^0_{\ell,m;h_1,h_2}|pq$$

証明　補題1の証明と同様にして

$$u^{n+1}_{l,m;h_1h_2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2p}\alpha^n_{l+1,m;h_1h_2}\right)u^n_{l+1,m;h_1h_2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2p}\alpha^n_{l-1,m;h_1h_2}\right)u^n_{l-1,m;h_1h_2}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q}\beta^n_{l,m+1;h_1h_2}\right)u^n_{l,m+1;h_1h_2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q}\beta^n_{l,m-1;h_1h_2}\right)u^n_{l,m-1;h_1h_2}$$

ここで

$$\alpha^n_{l,m;h_1h_2} = \begin{cases} f^n_{l,m;h_1h_2}/u^n_{l,m;h_1h_2} & u^n_{l,m;h_1h_2} \neq 0 \\ f'(u^n_{l,m}) & u^n_{l,m;h_1h_2} = 0 \end{cases}$$

$$\beta^n_{l,m;h_1h_2} = \begin{cases} g^n_{l,m;h_1h_2}/u^n_{l,m;h_1h_2} & u^n_{l,m;h_1h_2} \neq 0 \\ g'(u^n_{l,m}) & u^n_{l,m;h_1h_2} = 0 \end{cases}$$

したがって、

$$\sum_{\substack{|l|\leqq N_1 \\ |m|\leqq N_2}} |u^{n+1}_{l,m;h_1h_2}|pq \leqq \sum_{\substack{|l|\leqq N_1+1 \\ |m|\leqq N_2+1}} |u^n_{l,m;h_1h_2}|pq$$

補題3、　$u^{n;h}_{l,m} = u^{n+h}_{l,m} - u^n_{l,m}$ とかくとき

$$\sum_{\substack{|l|\leqq N \\ |m|\leqq N_2}} |u^{n;h}_{l,m}|pq \leqq \sum_{\substack{|l|\leqq N_1+n \\ |m|\leqq N_2+n}} |\mathrm{conv}\{u^0_{l,m,h_1h_2} ; |h_1|+|h_2|\leqq h\}|pq$$

証明、補題2の証明とまったく同様にして

$$\sum_{\substack{|l|\leqq N_1 \\ |m|\leqq N_2}} |u^{n;h}_{l,m}|pq \leqq \sum_{\substack{|l|\leqq N_1+n \\ |m|\leqq N_2+n}} |u^{0;h}_{l,m}|pq$$

ところが (8) より

$$u^h_{l,m} = \mathrm{conv}\{u^0_{l,m;h_1h_2} ; |h_1|+|h_2|\leqq h\}$$

補題4. 差分方程式（7）の解は任意の定数kに対して．

$$\frac{|u^{n+1}_{l,m}-k|-\overline{|u^{n}_{l,m}-k|}}{r}+\frac{\mathrm{sign}(u^{n}_{l+1,m}-k)[f^{n}_{l+1,m}-f(k)]-\mathrm{sign}(u^{n}_{l-1,m}-k)[f^{n}_{l-1,m}-f(k)]}{2p}$$
$$+\frac{\mathrm{sign}(u^{n}_{l,m+1}-k)[g^{n}_{l,m+1}-g(k)]-\mathrm{sign}(u^{n}_{l,m-1}-k)[g^{n}_{l,m-1}-g(k)]}{2q}\leqq 0,$$

証明．

$$u^{n+1}_{l,m}-k=\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2p}\alpha^{n}_{l+1,m}(k)\right)(u^{n}_{l+1,m}-k)+\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{2p}\alpha^{n}_{l-1,m}(k)\right)(u^{n}_{l-1,m}-k)$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2q}\beta^{n}_{l,m+1}(k)\right)(u^{n}_{l,m+1}-k)+\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{2q}\beta^{n}_{l,m-1}(k)\right)(u^{n}_{l,m-1}-k)$$

ここで．

$$\alpha^{n}_{l,m}(k)=\begin{cases}(f^{n}_{l,m}-f(k))/(u^{n}_{l,m}-k) & u^{n}_{l,m}\neq k\\ f'(k) & u^{n}_{l,m}=k\end{cases}$$

$$\beta^{n}_{l,m}(k)=\begin{cases}(g^{n}_{l,m}-g(k))/(u^{n}_{l,m}-k) & u^{n}_{l,m}\neq k\\ g'(k) & u^{n}_{l,m}=k\end{cases}$$

$u^{n}_{l\pm1,m\pm1}-k$の係数はすべて正であることより補題は従がう。

§3． 差分解の収束．

$$u^{0}_{l,m}=\frac{1}{pq}\int_{pl}^{(l+1)p}\int_{qm}^{(m+1)q}u_0(x,y)\,dx\,dy$$ とし．

$$U(t,x,y)=u^{n}_{l,m}\qquad nr\leqq t<(n+1)r,\ lp\leqq x<(l+1)p,\ mq\leqq y<(m+1)q$$

とおく．

いま、

(9) $\frac{r_n}{p_n} = \lambda_1 < \frac{1}{2A}$ $\frac{r_n}{q_n} = \lambda_2 < \frac{1}{2B}$, λ_1, λ_2 定数. $r_n \to 0\ (n \to \infty)$

なる列に対応して、上のように定義した関数列を $U^n(t, x, y)$

とすると、補題1より

$$|U^n(t, x, y)| \leqq M.$$

補題2および補題3より、

$$\iint_{\substack{|x| \leqq X \\ |y| \leqq Y}} |U^n(t+\tau, x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U^n(t, x, y)| dxdy$$

$$\leqq \iint_{\substack{|x| \leqq X + \frac{1}{\lambda_1}t \\ |y| \leqq Y + \frac{1}{\lambda_2}t}} |U_0^n(x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U_0^n(x, y)| dxdy$$

$$+ \iint_{\substack{|x| \leqq X + \frac{1}{\lambda_1}t \\ |y| \leqq Y + \frac{1}{\lambda_2}t}} |V^n(x, y)| dxdy$$

ここで $V^n(x, y) = \operatorname{conv}\{U_0^n(x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U_0^n(x, y), \lambda_1|\tilde{h}_1| + \lambda_2|\tilde{h}_2| \leqq \tau\}$

ところが、明らかに、$\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tau \longrightarrow 0$ としたとき、上式の右辺は、n に関して一様に 0 に収束する。したがって $\{U^n\}$ は、L^1_{loc} でコンパクトである。したがって、一般性を失なうことなしに $\{U^n\}$ が L^1_{loc} で収束すると仮定してよい。

このことと補題4、および、*gen. sol* の一意性より、定理、条件 (9) をみたす列 $\{r_n, p_n, q_n\}$ に対する差分方程式の解 $\{U^n(t, x, y)\}$ は、初期値問題 (5), (6) の *gen. sol* に収束する。

証明．$\varphi(t,x,y) \in C_c^\infty(\Pi_T)$，$\varphi(t,x,y) \geqq 0$ に対して

$$0 = \varphi^n_{l,m}\left(\frac{u^{n+1}_{l,m} - \bar{u}^n_{l,m}}{r} + \frac{f^n_{l+1,m} - f^n_{l-1,m}}{2p} + \frac{g^n_{l,m+1} - g^n_{l,m-1}}{2q}\right)$$

$$\geqq \varphi^n_{l,m}\left\{\frac{|u^{n+1}_{l,m} - k| - \overline{|u^n_{l,m} - k|}}{r} + \frac{\mathrm{sign}(u^n_{l+1,m} - k)[f^n_{l+1,m} - f(k)] - \mathrm{sign}(u^n_{l-1,m} - k)[f^n_{l-1,m} - f(k)]}{2p}\right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{sign}(u^n_{l,m+1} - k)[g^n_{l,m+1} - g(k)] - \mathrm{sign}(u^n_{l,m-1} - k)[g^n_{l,m-1} - g(k)]}{2q}\right\}$$

に pqr をかけて，l, m, n について加えると容易に分かるように，

$$\iiint\left\{|U^n(t,x,y) - k|\varphi_t + \mathrm{sign}(U^n - k)[f(U^n) - f(k)]\varphi_x + \mathrm{sign}(U^n - k)[g(U^n) - g(k)]\right\}$$

$$dt\,dx\,dy \geqq O(|r_n| + |p_n| + |q_n|)$$

したがって $n \to \infty$ とすると $U^n \to u(t,x,y)$ in $L^1_{loc}(\Pi_T)$ より，$u(t,x,y)$ は条件 (i) をみたす。条件 (ii) をみたすことは補題 3 より直ちに分かる。

§4．補註

この結果は混合問題の場合でも，$u(t,x)$ が境界条件をみたすということを初期値のときと同様に，L^1_{loc} で定義すれば適用出来る。

さらに非齊次項がくわわった場合にも適用出来る．

すなわち.

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y + h(t,x,y,u) = 0 & h_u(t,x,y,u),\ \text{bdd} \\ u(0,x,y) = u_0(x,y) \in L^\infty \end{cases}$$

のときは、gen. sol を 条件 (i) のかわりに.

(i)′ 任意の $\varphi(t,x,y) \in C_0^1(\Pi_T)$, $\varphi \geq 0$ と任意の定数 k に対して.

$$\iiint \Big\{ |u-k|\varphi_t + \text{sign}(u-k)\underbrace{[f(u)-f(k)]}_{}\overset{\varphi_x}{} + \text{sign}(u-k)[g(u)-g(k)]\overset{\varphi_y}{} - \text{sign}(u-k)\, h\varphi \Big\}\, dx\,dy\,dt \geq 0$$

でおき変え、差分近似を

$$\frac{u^{n+1}_{l,m} - \bar{u}^{n}_{l,m}}{r} + \frac{f^{n}_{l+1,m} - f^{n}_{l-1,m}}{2p} + \frac{g^{n}_{l,m+1} - g^{n}_{l,m-1}}{2q} + h^{n+1}_{l,m} = 0$$

とすればよい。

このときの gen. sol の一意性は Kružkov の場合とまったく同様にして示される。また差分解の今まで得られた評価に対応する評価も同様にして得られる。

文 献

[1]. Kružkov, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R Tom 187 ('69) No 1
(Soviet Math. Dokl. Vol 10 ('69), No 4)

[2]. Conway and Smoller, C.P.A.M Vol 19 ('66)

[3] Oleinik, Uspekhi Mat. Nauk 12 ('57)
(A.M.S. trans. Ser. 2, 26)

[4]. Kojima Proc. Jap. Acad. 42 ('66)

[5] Quinn C. P. A. M. 24 ('71)

[6] Hopf. J. Math. Mech. 19 ('69)