数理解析研究所講究録
第157巻 1972年 52-55

ノルム形式の整数解について

都立大理　藤原 正彦

$f(x,y)$ を $\mathbb{Q}$ 上既約な binary form で degree ≥ 3 なるものとする。「$f(x,y)=m\in\mathbb{Z}$ なる不定方程式の整数解が、有限個しかない」という定理は、60年程前に、Thue により証明されており、その一般性から、不定方程式論に於る最大定理の一つとなっている。さて、この定理を拡張する為に、次の考え方をする。$f(x,1)=0$ の根を一つとり、それを α とする。すると $f(x,y)=(x-\alpha y)(x-\alpha^{(2)}y)\cdots(x-\alpha^{(n)}y)$ と書き直せる。ただし、$[\mathbb{Q}(\alpha);\mathbb{Q}]=\deg f$ を n とし、$\alpha^{(i)}$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の共役を表わす。さて右辺は、再び $\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(x-\alpha y)$ となるから、結局、Thue の定理は

$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(x+\alpha y)=m$ なる方程式の整数解が有限であることを示している。そこで、次のような一般化を考えることが出来る。

kを有限次代数体，kの元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ をfixした時

$$\mathrm{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m) = n \in \mathbb{Z}$$

なる不定方程式の整数解は有限個に抑えられるか。
この問題に関して、最近、W. M. Schmidt [2] が著しい結果を得た。この小論では、Schmidt の定理を、いくつかのタイプのNorm形式に応用することを目的とする。

代数体Kに於る加群$\mathfrak{M}$がdegenerateとは次の時を言う。

$\mathfrak{M} \supset^{\exists} \mathfrak{N}$ submodule　　$K \supset^{\exists} K'$ subfield $\neq \mathbb{Q}$, 虚2次

$K \ni^{\exists} \alpha$　　such that　$\alpha\mathfrak{N} \subset K'$, $\mathrm{rank}\,\mathfrak{N} = \deg K'$

なお、degenerateでない時に、non-degenerateという。
定理（W. M. Schmidt）[2]
K：代数体　$[K;\mathbb{Q}] \geqq 3$　，　$K \ni \alpha_1, \cdots, \alpha_n$　一次独立$/\mathbb{Q}$
とする。この時、もしも、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の$\mathbb{Z}$上生成するmoduleが、non-degenerateならば、次の不定方程式

$$N(x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n) = C$$

ただし、NはKからQへのノルム，Cは勝手な有理数，は、高々有限個の整数解 $x_1, \cdots, x_n$ しか持たない。

この定理は、すぐ分るようにThueの定理を含んでいる。

なお、Schmidtの証明は、Thueの定理のもともとの証明のように、Diophantine approximationを用いて行われるが、Thueの定理がRothの定理から直ちに導かれるのに反して、かなりの苦心が要る。

さて、一つの応用として

(定理) h：整数>0　θ：代数的数で $\mathrm{degree}\,\theta = n > 2h$ とする。Nを$\mathbf{Q}(\theta)$から$\mathbf{Q}$へのノルムとすれば、任意の有理数cに対して、次の方程式

$$N(x_0 + x_1\theta + \cdots + x_h\theta^h) = c$$

は高々有限個の整数解しか持たない。

なおC. L. Siegelが同じ結果をより強い条件の下で得ている[3]。そこでは、$n > h^2\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$ ただし $2s = \sqrt{4n+1} - 1$ なる仮定をしている。

ここで注意として、上の定理は、ある意味でbest possibleである。何故なら、$n = 2h$とおいた時、$\theta^h = \alpha$が実の2次数になるようにθを選べば、$N(x_0 + x_h\alpha) = N(x_0 + x_h\theta^h) = c$は、適当な$c$に対して、単数定理により無限個の整数解$x_0, x_h$を持つ。従って、$N(x_0 + x_1\theta + \cdots + x_h\theta^h) = c$は無限個の整数解をもつ。又、Thueの定理は、$n \geqq 3$, $h = 1$のspecial caseとなっている。

なお、この定理の証明、及び他のいくつかの方程式への応用は文献[1]を見て頂ければ分ります。

～ 文 献 ～

[1] M. Fujiwara : Some applications of a Theorem of W.M. Schmidt, Michigan Math. J. にto appear

[2] W.M. Schmidt : Linearformen mit algebraischen Koeffizienten II, Math. Annalen 191 (1971)

[3] C.L. Siegel : Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeit. 10 (1921)