数理解析研究所講究録
第 157 巻 1972 年 56-62

多項式の power-free な値について

岡山大 理　内 山 三 郎

§1. 序

k は 1 より大なる任意の整数とする． 整数 n が 1 の他に k 乗巾の因数をもたないとき，n は k-th power-free あるいは簡単に k-free と呼ばれる．

$f = f(u)$ を r 次の有理整係数の多項式とする． P. Erdős [1] は，もし $r \geqq 3$ で $f(n)$ が 1 の他に一定の $r-1$ 乗巾の因数をもたないならば，$f(u)$ は u の無限に多くの整数値 n に対して $(r-1)$-free な整数を表わすことを証明した． 最近 C. Hooley [2] は，$f(n)$ の値が $(r-1)$-free となるような正の整数 $n \leqq x$ の個数 $N(x)$ に対する漸近式をあたえた．

$f(u)$ が既約な多項式のときその漸近式はつぎの形をとる：

$$(1) \qquad N(x) = Cx + O\left(\frac{x}{(\log x)^{B/\log\log\log x}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

ここに $B > 0$ および C はともに多項式 $f(u)$ に依存する定数

であって，もし $f(u)$ が u の整数値に対して 1 の他に一定の $r-1$ 乗巾の因数をもたないならば $C>0$ である． Hooley[3] はまた 3 次の多項式 $f(u)=au^3+b$ に対して漸近式 (1) における残余項が

$$O(x(\log x)^{-2/3})$$

に改良されることを証明している．

Erdős [1] はまた証明なしにつぎのことを述べている．すなわち， $f=f(u)$ が次数 $r\geqq 2$ の有理整係数の多項式であって一次式の r 乗巾に等しくないならば， $f(p)$ の値が r-free となるような無限に多くの素数 p が存在する． しかしながら，これは必ずしも正しくない． 例えば $f(u)=u^2+7$ とすればすべての奇素数 p に対して $f(p)\equiv 0 \pmod{2^3}$ である．

本稿では，多項式 f に関する適当な条件のもとに， $f(p)$ が r-free となるような素数 $p\leqq x$ の個数 $M(x)$ に対するひとつの漸近式をあたえたいと思う． その結果は少しばかり一般的な形に述べることができる．

さて， $A=(a)$ は正の整数のある増加列とする． 任意の実数 $x\geqq 1$ に対して

$$A_x=\{a\in A:\ a\leqq x\}$$

と書き， A_x に含まれる整数の個数を $A(x)$ で表わすことに

する．

われわれはつぎの三つの条件をみたす整数列 A を考える：

(i) 定数 $B>0$ および $c>0$ が存在して

$$A(x) > B\frac{x}{(\log 2x)^c} \quad ;$$

(ii) $A(x, k, l)$ によって $a \equiv l \pmod{k}$ をみたす A_x の整数 a の個数を表わすとき，$(k, l)>1$ であるような整数 k, l に対して $A(x, k, l)$ は一様に上に有界である；

(iii) 任意の固定された $E>0$ および $H>0$ に対して

$$A(x, k, l) = \frac{A(x)}{\varphi(k)} + O\left(\frac{A(x)}{(\log x)^H}\right)$$

が $1 \leqq k \leqq (\log x)^E$, $(l, k)=1$ について一様に成立つ．

とくに，A がすべての素数からなる列であるとき，この A に対して上の三つの条件がみたされることはよく知られている．

われわれは $f(a)$ が r-free となるような整数 $a \in A_x$ の個数を $M(x)$ で表わし，この $M(x)$ に対してひとつの漸近式をあたえる．

§2. 定理

$f=f(u)$は次数$r \geqq 2$，有理整係数の原始多項式とする

もしfの判別式D_fが0でないならば

$$(2) \qquad M(x) = C\,A(x) + O\left(\frac{A(x)}{\log\log x}\right) \qquad (x \to \infty)$$

が成立つ． ここに

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{\rho^*(p^r)}{p^{r-1}(p-1)}\right)$$

でpはすべての素数の上に亘り$\rho^*(k)$は合同式

$$f(u) \equiv 0 \pmod{k}$$

の非合同な解$u \pmod{k}$のうち$(u,k)=1$をみたすもの

の個数を表わす．

§3. 定理の証明（概要）

合同式$f(u) \equiv 0 \pmod{k}$の解$(\mathrm{mod}\ k)$の個数を$\rho(k)$と

すれば，$\rho(k)$は乗法的関数である． すなわち$(k_1, k_2)=1$

ならば

$$\rho(k_1 k_2) = \rho(k_1)\rho(k_2)$$

が成立つ． また，素数の巾kに対して$\rho(k)=O(1)$であり，従って一般の正の整数kに対して

$$\rho(k) = O(k^{\varepsilon})$$

が任意の正数 ε を以て成立つこと，はよく知られている．

容易に分るように， $\rho^*(k)$ もまた乗法的である． 明らかに，すべての k に対して $0 \leqq \rho^*(k) \leqq \min(\varphi(k), \rho(k))$ である．

さて，k を任意の正整数とし $f(a) \equiv 0 \pmod{k}$ をみたす整数 $a \in A_x$ の個数を $Z_k(x)$ と記すことにする．

$$\xi_1 = \log\log x$$

とおき， $f(a)$ が ξ_1 を超えないどの素数の r 乗巾でも割れないような整数 $a \in A_x$ の個数を $P(x)$ とすれば

$$M(x) = P(x) + R(x)$$

と書くことができる． ここに，

$$P(x) = \sum_k \mu(k) Z_{k^r}(x)$$

で k は ξ_1 より大なる素因数をもたない square-free (すなわち 2-free) な正の整数の上に亘り， また

$$0 \leqq -R(x) \leqq \sum_{p > \xi_1} Z_{p^r}(x)$$

である．

整数列 A に対する条件 (ii)，(iii) から容易に

$$P(x) = C A(x) + O\left(\frac{A(x)}{\log\log x}\right)$$

であることが分る．　定数 C は上の定理において記されたものである．

つぎに

$$\xi_2 = (\log x)^{c+1}, \quad \xi_3 = \frac{x}{\xi_2}$$

とおき，

$$\sum_{p>\xi_1} Z_{p^r}(x) = \sum_{\xi_1<p\leqq\xi_2} + \sum_{\xi_2<p\leqq\xi_3} + \sum_{p>\xi_3}$$

$$= R_1(x) + R_2(x) + R_3(x)$$

と書く．

条件 (i)，(ii)，(iii) により

$$R_1(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log\log x}\right)$$

であり，また

$$R_2(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log x}\right)$$

であることは直ちに分る．

$R_3(x)$ の評価は Hooley [2] の論法と並行になされ，

$$R_3(x) = O\left(\frac{A(x)}{(\log x)^{B/\log\log\log x}}\right)$$

がえられる．　ここに $B>0$ は f にのみ依存する定数である．

これらの結果をあつめれば

$$R(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log\log x}\right)$$

となり，漸近式（２）がえられるのである．

われわれの定理の証明の詳細は別に発表する予定である（［４］参照）．

文　　献

[1] P. Erdős: Arithmetical properties of polynomials. Journ. London Math. Soc., 28(1953), 416-425.

[2] C. Hooley: On the power free values of polynomials. Mathematika, 14(1967), 21-26.

[3] ———: On the square-free values of cubic polynomials. Journ. für reine und angew. Math., 229 (1968), 147-154.

[4] S. Uchiyama: On the power-free values of a polynomial. To appear.