数理解析研究所講究録
第 160 巻 1972 年 5-11

多項式係数偏微分作用素の値域が稠密でない例について

広大 理　津野義道

§1. 序

Ωを、複素n次元空間 $\mathbb{C}^n$ のある領域とし、$H(\Omega)$ は、Ω内で $z=(z_1,\cdots,z_n)$ に関して正則な関数の全体で、compact convergence 位相を入れたものとする。Ωが凸領域の場合は、任意の定数係数偏微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial z})$ に対して、$P(\frac{\partial}{\partial z}): H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega)$ は surjective となり、従って特に $P(\frac{\partial}{\partial z})$ の値域 $P(\frac{\partial}{\partial z})H(\Omega)$ は、$H(\Omega)$で稠密となる。ここでは、変数係数の場合、その値域が稠密になるかどうかを調べる。例えば、作用素 $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$の係数が$\Omega$のある点$z_0$を共通零点として持てば、$H(\Omega)$ の $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ による値域に属する関数は、z_0で0となり、従ってその値域は、$H(\Omega)$で稠密とはなり得ない。この小文の目的は、例え $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ の係数がΩで共通零点を持たなくても、その値域が稠密でないような例を構成する事である。構成にあたって

の本質的な部分は、I. Wakabayashi [5] による。

§2、一次元の場合の考察

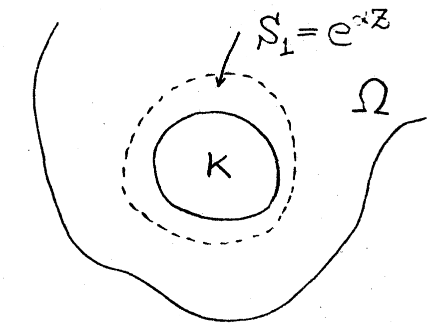
解析的汎関数とcompact supportをもつdistributionの関係から、次のPropositionが知られている。

<u>Proposition 1.</u> (Y. Tsuno [3], P.148):

Ωを$\mathbb{C}$内のnon-simply connected domain、
$P(\frac{d}{dz})$をorder $\geqq 1$の定数係数微分作用素とすると、
$P(\frac{d}{dz})H(\Omega)$は$H(\Omega)$で稠密にならない。

<u>Proof</u>

$P(\frac{d}{dz}) : H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega)$ のadjoint operator $P(-\frac{d}{dz}) : H'(\Omega) \longrightarrow H'(\Omega)$ が一対一でないことを示せばよい。多項式$P(X)$は、order $\geqq 1$ だから、$P(-\alpha) = 0$となる複素数αがある。又、Ωがnon-simply connectedだから、$\complement\Omega$にはcompact component Kがある。そこで$S_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$を、



$$S_1 = e^{\alpha z} \quad \text{……}K\text{の近傍で、}$$

かつ、 $\mathrm{supp}\, S_1 \subset K \cup \Omega$

となるものとする。さらに、

$$S_2 = \frac{d}{dz} S_1 \quad , \quad S_3 = P(-\tfrac{d}{dz}) S_1$$

とおく。このとき、

$$\operatorname{supp} S_2 \subset \Omega \quad , \quad \operatorname{supp} S_3 \subset \Omega$$

即ち、 $S_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $S_3 \in \mathcal{E}'(\Omega)$ となる。そこで、
$\mu \in H'(\Omega)$ を、S_2 の $H(\Omega)$ ($\subset C^\infty(\Omega)$) への制限とする。

i.e. $\quad \mu(f) = \langle S_2, f \rangle \quad$ for $\forall f \in H(\Omega)$.

このとき、$\mu \neq 0$ in $H'(\Omega)$. 何故なら、もし $\mu = 0$ とすれば、解析的汎関数と distribution の関係 $H'(\Omega) \cong \mathcal{E}'(\Omega) \big/ \frac{d}{d\bar{z}} \mathcal{E}'(\Omega)$ と、μ の作り方より、$\frac{d}{d\bar{z}} S_1 \in \mathcal{E}'(\Omega)$ は、ある $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ に対して、$\frac{d}{d\bar{z}} S_1 = \frac{d}{d\bar{z}} T$ と表わせるはずであり、$\frac{d}{d\bar{z}} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ は一対一だから これから、$S_1 = T$ となるが、これは $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} S_1 \not\subset \Omega$ に矛盾する。一方

$$P(-\tfrac{d}{dz}) S_2 = \frac{d}{d\bar{z}} P(-\tfrac{d}{dz}) S_1 = \frac{d}{d\bar{z}} S_3 \in \frac{d}{d\bar{z}} \mathcal{E}'(\Omega)$$

だから、$P(-\frac{d}{dz}) \mu = 0$. 従って $P(-\frac{d}{dz}) : H'(\Omega) \to H'(\Omega)$ は一対一ではない。 Q.E.D.

<u>Remark</u>. Proposition 1 の、analytic functional を使わずに、operator の index を使う elegant な別証が、小松(彦)先生によって得られている。

§ 3. 微分作用素の構成

Wermer の例 (Gunning-Rossi [1], P. 38) を使う。F を $\mathbb{C}^3$ から $\mathbb{C}^3$ への holomorphic map ;

$$F(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3)$$
$$= (z_1,\ z_1 z_2 + z_3,\ z_1 z_2^2 - z_2 + 2 z_2 z_3)$$

とする。この時、b $(0 < b < \frac{1}{2})$ を十分小さくとれば、

F は polydisc Δ_b ;

$$\Delta_b = \{ (z_1, z_2, z_3) \mid |z_1| < 1+b,\ |z_2| < 1+b,\ |z_3| < b \}$$

を、その image $D = F(\Delta_b)$ へ biholomorphic に移す。

又、$\Pi = \{(w_1,\ 1,\ 0)\}$ とすると、

$$\Pi \cap D = \left\{ (w_1,\ 1,\ 0) \;\middle|\; \frac{1}{1+b} < |w_1| < 1+b \right\}$$

となる。さらに、D が正則領域であることから、$\Pi \cap D$ 上で正則な関数は D 全体で正則な関数にまで延長可能である。

以上を使って、問題の作用素を構成する。

Proposition 1 より、$\sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{d}{dw_1}\right)^k$, ($m \geq 1$, $a_m \neq 0$, a_k : const.) は、$H(\Pi \cap D)$ (一変数 w_1 の関数とみたもの) の中で考えて、その値域は稠密ではない。そこで、$H(\Pi \cap D)$ が $H(D)$ まで延長可能であることを使えば、

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right)^k \right\} H(D)$$

は $H(D)$ で稠密でない。又、D と Δ_b とは biholomorphic であるから、上の作用素を $H(\Delta_b)$ 上に移すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial w_1} = \frac{\partial z_1}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial z_2}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial z_3}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{z_2^2}{1-2z_3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{z_1 z_2^2 - z_2 + 2 z_2 z_3}{1-2z_3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_3}$$

従って、

$$P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= (1-2z_3)^{2m-1} \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{z_2^2}{1-2z_3} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{z_1 z_2^2 - z_2 + 2 z_2 z_3}{1-2z_3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^k$$

とおけば、$P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ は多項式係数の偏微分作用素であり、それらの係数は Δ_b で共通零点を持たず(注: Δ_b 上では、$1-2z_3 \neq 0$)、$P(z, \frac{\partial}{\partial z})H(\Delta_b)$ は $H(\Delta_b)$ で稠密にはならない。以上、まとめると、

<u>Proposition 2</u>:

$P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ を、上のように定義した微分作用素とすれば、それらの多項式係数は、Δ_b で共通零点をもたなくて、かつ $P(z, \frac{\partial}{\partial z})H(\Delta_b)$ は $H(\Delta_b)$ で稠密にならない。

§4、付記

Cauchy-Kowalevsky の定理について考えてみる。

<u>Theorem</u> (J. Leray [2], P399);

$P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ の係数は $\{ z \mid |z_j| \leq R, j=1,\cdots,n \}$ で正則、又 complex hyperplane $\{ z_1 = 0 \}$ が、$z=0$ で $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ に関して non-characteristic とする。このとき、$\{z_1=0\}$ での Cauchy data の収束半径を r, 非斉次項の収束半径を R とした時、

$$\text{i.e.} \begin{cases} P(z, \frac{\partial}{\partial z})\, u(z) = v(z), \ \text{holo. on} \{ |z_j| \leq R \quad j=1,\cdots,n \} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^k u(z) \Big|_{z_1=0} = w_k(z_2,\cdots,z_n), \ \text{holo. on} \{ |z_j| \leq r, \ j=2,\cdots,n \} \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \cdots, m-1. \quad (m = \text{order of } P)$$

正則な一意解 $u(z)$ は、

$$\|z\| < \frac{1}{12nm}\, q \cdot \inf(qR, r)$$

で存在する。但し

$$\begin{cases} \|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2, \\ N = (1, 0, \cdots, 0), \quad P_m(z, p) \text{ は } P \text{ の principal part} \\ q = \dfrac{|P_m(0, N)|}{\sup\limits_{\substack{|z_j| = R \\ |p_j| = 1}} |P_m(z, p)|}. \end{cases}$$

これを、Proposition 2 で $m = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$ としたもの $Q(z, \frac{\partial}{\partial z})$

i.e. $Q(z, \frac{\partial}{\partial z}) = (1 - 2z_3)\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + (z_1 z_2^2 - z_2 + 2z_2 z_3)\frac{\partial}{\partial z_3}$

に適用すれば、($R = r = 1$, $q \geqq \frac{1}{7}$), 任意の $v(z)$; holomorphic on $\{|z_j| \leqq 1, j = 1, 2, 3\}$ に対して、$Q(z, \frac{\partial}{\partial z})u(z) = v(z)$ の解が、$\{\|z\| < \frac{1}{36 \cdot 7^2}\}$ で存在する。そこで、

$$\Delta = \left\{(z_1, z_2, z_3) \,\middle|\, |z_j| < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{36 \cdot 7^2} \quad j = 1, 2, 3\right\}$$

とおけば、$\Delta \subset \{\|z\| < \frac{1}{36 \cdot 7^2}\}$.

又、$H(\Delta)$ で多項式が稠密だから、結局、$Q(z, \frac{\partial}{\partial z})H(\Delta)$ は $H(\Delta)$ で稠密となる。

以上まとめると、上で定義した作用素 $Q(z, \frac{\partial}{\partial z})$ に対して

(i) $Q(z, \frac{\partial}{\partial z})H(\Delta_k)$ は $H(\Delta_k)$ で稠密でない。

(ii) $Q(z, \frac{\partial}{\partial z})H(\Delta)$ は $H(\Delta)$ で稠密である。

文　献

[1] R. C. Gunning - H. Rossi : Analytic Functions of Several Complex Variables.
Prentice-Hall Inc. (1965)

[2] J. Leray : Problème de Cauchy I
Bull. Soc. Math. France 85 (1957) 389–430

[3] Y. Tsuno : Analytic Functionals and Distributions
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 34 (1970)
p.p. 145 — 152.

[4] ———— : Differential Operator without a Dense Range. to appear.

[5] I. Wakabayashi : Non-existence of holomorphic solutions of $\frac{\partial u}{\partial z_1} = f$.
Proc. Jap. Acad. 44 (1968) p.p. 820 – 822.