数理解析研究所講究録
第160巻 1972年 32-47

双曲型混合問題に対する解の解析性の伝播について

京産大理　辻　幹雄

§.I, 序

quarter space $V=\{(t,x)\ ;\ t>0,\ \ x=(x',x_n),\ x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\in R^{n-1},\ x_n>0\}$ で次の様な双曲型混合問題を考える.

$$(1\text{-}1)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}A_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+B(t,x)\right)u(t,x)+f(t,x)\equiv L(t)u+f(t),\ (t,x)\in V\\ u(0,x)=g(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n_+\\ P(t,x')\ u(t,x)\big|_{x_n=0}=0\end{cases},$$

ここで $A_i(t,x)$, $B(t,x)$ は $N\times N$ 行列; $u(t,x)$ は N-vector; $P(t,x')$ は $l\times N$ 行列とする。この小論の目的は (1-1) に対する解の解析性の伝播について或る結果を報告する事である。解が $\overline{V}$ で連続的微分可能であるための条件として compatibility condition を定義する.

[定義 1-1]　$g(x)$ 及び $f(t,x)$ が $k=0,1,\dots,m$ に対して

$$(1\text{-}2)\quad \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}P^{(i)}(0,x')\ g_{k-i}(x)\ \Big|_{x_n=0}=0$$

を満足するとき, g, f は order m の compatibility condition

を満たすという．ここで $g_k(x)$ は次の公式により順次構成する。

(1-3) $g_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} L^{(i)}(0)\, g_{k-i}(x) + \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0,x) \quad (k \geq 0)$

但し $g_0(x) = g(x)$; $L^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^i A_j}{\partial t^i}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^i B}{\partial t^i}(t,x)$

; $P^{(i)}(t,x') = \frac{\partial^i P}{\partial t^i}(t,x')$; $\binom{k}{i} = k!/i!\cdot(k-i)!$.

今，$A_i(t,x)$, $B(t,x)$ 及び $P(t,x')$ は analytic，更に g, f も analytic で任意 order の compatibility condition を満足すると仮定すれば Cauchy-Kowalewski の定理より t が十分小のとき，(t,x) に関し analytic な (1-1) の解が一意的に存在する事がわかる．ここで t を大きくしたとき，解析性が伝播するかどうかを論じる．このとき Cauchy-Kowalewski の定理を繰り返し使う事では成功しない．そこで次の事実を仮定する．

[仮定 1-1] $g(x) \in H^1(R^n_+)$, $f(t,x) \in \mathcal{E}^1_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$(*) が order 0 の compatibility 条件を満たすとき $\mathcal{E}^1_t(L^2)\cap\mathcal{E}^0_t(H^1)$ に入る (1-1) の解が一意的に存在し次のエネルギー不等式が成立する．

(1-4) $\|u(t)\| \leq c_0 e^{\mu_0 t}\|g\| + d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)}\|f(s)\|\,ds$

(1-5) $|||u(t)|||_1 \leq c_1 e^{\mu_1 t}|||u(0)|||_1 + d_1 \int_0^t e^{\mu_1(t-s)}|||f(s)|||_1\,ds$

ここで $|||u(t)|||_1 = \|u(t)\|_1 + \|u'(t)\|$, $\|u\|_1$ は $H^1(R^n_+)$-norm ;

$\mu_0, \mu_1, c_0, c_1, d_0, d_1$ は u, g, f 及び t に無関係な正の定数．

[仮定 1-2] (1-1) は有限伝播速度をもつ．即ち或る正数 λ があり

(*) $u(t,x) \in \mathcal{E}^m_t(E)$ とは $u(t,x)$ が E-valued function として m 回連続的微分可能である事を示す．

$C=\{(t,x)\,;\ t\leqq -\lambda|x|\}$ とおくとき (1-1) の解 $u(t,x)$ の点 $(t,x)\in V$ における依存領域は $C+(t,x)=C_{(t,x)}$ に含まれる.

[仮定1-3] A_n は正則行列, rank $P=l$ (=定数) である。

上記の3つの仮定を満たす方程式系の例として『$L(t)$ は対称系, Ker P は L に対して maximal non-positive』というclassがある。この事実はこの小論の後半で概説する。

[仮定1-1], [仮定1-2], [仮定1-3] より (1-1) の解の regularity に関して、次の定理を得る.

[定理1-1] $g(x)\in H^m(R^n_+)$, $f(t,x)\in \mathcal{E}^m_t(L^2)\cap\mathcal{E}^{m-1}_t(H^1)\cap\cdots\cap\mathcal{E}^0_t(H^m)$ が order $(m-1)$ の compatibility 条件を満足するとき $(m\geqq 2)$, (1-1)の $\mathcal{E}^m_t(L^2)\cap\cdots\cap\mathcal{E}^0_t(H^m)$ に入る解 $u(t,x)$ が一意的に定まり, 次のエネルギー不等式が成立する.

$$|||u(t)|||_k \leqq c_k\, e^{\mu_k t}\, |||u(0)|||_k + d_k \int_0^t e^{\mu_k (t-s)}\, |||f(s)|||_k\, ds \quad (*)$$

for $k=0,1,\dots,m$. 但し, c_k, d_k, μ_k は正の定数.

これより g 及び f が C^∞ で任意orderの compatibility 条件を満足するならば解も C^∞ である事がわかる. (当然 L の係数, 及び P が C^∞ という仮定のもとで.) 次に (1-1) の解の解析性の伝播についての定理を述べる。点$(t_0,x_0)\in V$をとる. 錐$C_{(t_0,x_0)}$と初期平面 $\{t=0\}\cap\overline{V}$ との共通部分をC_0と記す. そして $A_i(t,x)$, $B(t,x)$ 及び $P(t,x')$ は $C(t_0,x_0)\cap V$ の近傍で analytic と仮定す

(*) $|||u(t)|||_k=\sum_{i=0}^{k}\left\|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(t)\right\|_{k-i}$, $\|u\|_p$ は $H^p(R^n_+)$-norm

る。このとき次の定理を得る.

[定理1-2] $g(x)$ は C_0 の近傍で analytic, $f(t,x)$ は $C_{(t_0,x_0)} \cap V$ の近傍で analytic, かつ g, f が任意 order の compatibility 条件を満足するならば解 $u(t,x)$ (t_0, x_0) で (t,x) に関して解析的である。

[定理1-1]の証明は[定理1-2]の証明から類推出来るので紙数の関係から省略する。

§. 2. The proof of Theorem 1-2

解 $u(t,x)$ は $C_{(t_0,x_0)} \cap V$ の近傍で C^∞ である事が[定理1-1]からわかる. 従って方程式 (1-1) を classical sense で微分する事が出来る。そして得られた偏導函数を順次評価する事により[定理1-2]を証明する。その際、以下の様に $u(t,x)$ の一次変換を行う.

$$P(t,x') = {}^t[{}^t\vec{P}_1, {}^t\vec{P}_2, \cdots, {}^t\vec{P}_\ell], \quad \vec{P}_i(t,x') = (P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{iN}), \ i=1,\cdots,\ell$$

とおく。$\vec{P}_1, \cdots, \vec{P}_\ell$ を Schmidt の方法で直交化したものを $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_\ell$ とおく. $\{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_\ell, \vec{e}_{\ell+1}, \cdots, \vec{e}_N\}$ が C^N の正規直交系となる様にベクトル $\vec{e}_{\ell+1}, \cdots \vec{e}_N$ をとる。このとき $\vec{e}_i$ $(\ell+1 \leq i \leq N)$ は P が C^m ならば C^m, P が analytic なら analytic である様にとれる事に注意する。これらから unitary 行列 $T(t,x') = \{\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \cdots, \vec{e}_N^{\,*}\}$ を作る。そして $u = Tv$ と一次変換を行うと境界条件は次の様になる.

$$Pu = PTv = \left[\ (\vec{P}_i, \vec{e}_j)_{1 \leq i,j \leq \ell} \quad 0 \ \right] v.$$

$$\left([(\vec{P}_i, \vec{e}_j)_{1 \leq i,j \leq \ell}] \text{ は } \ell \times \ell \text{ 正則行列.} \right)$$

従って $Pu \big|_{x_n=0} = 0$ は v に対する条件 $[E_\ell, 0]\, v\big|_{x_n=0} = 0$ と

同値になる。ここで E_ℓ は $\ell\times\ell$ 単位行列である。しかも $\mathcal{P}$ がユニタリーなので仮定はすべて保存される。従って v を改めて u とおき，P を constant matrix とみなして議論を進めていく事にする。

(t_0, x_0) を中心，半径十分小の球 $D(t_0, x_0)$ をつくる。

$$D = \Big(\bigcup_{(t,x)\in D(t_0,x_0)} C_{(t,x)}\Big) \cap V, \qquad D_0 = \{t=0\}\cap \overline{D}$$

とおいたとき $A_i(t,x)$ $(i=1,\cdots,n)$，$B(t,x)$，$f(t,x)$ は D の近傍で，$g(x)$ は D_0 の近傍でそれぞれ analytic となる様に $D(t_0, x_0)$ の半径を十分小さくとる。$\alpha(t,x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ を D の近傍で恒等的に 1，かつ $supp[\alpha]$ で A_i，B 及び f が analytic となり更に，$\alpha(x) = \alpha(0,x)$ とおくと $supp[\alpha(x)]$ で $g(x)$ が analytic なる様に $\alpha(t,x)$ をとる。次に D の近傍では u，$\frac{\partial u}{\partial t}$，$\frac{\partial u}{\partial x_1}$，$\cdots$，$\frac{\partial u}{\partial x_n}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $\cdots$ に等しい v，v_0，v_1，$\cdots$，v_n，v_{ij}，$\cdots$ を構成する。v の添数の中で "0" は $\frac{\partial}{\partial t} \equiv D_0$ に対応するものである事を注意しておく。従って v_0 は u に対応するものでなく，$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0 u$ を近似するものである。$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ とする。

0) $v(t,x)$ の構成．

$$(2\text{-}1)\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = L(t)v + \alpha(t,x)f(t,x) \\ v(+0,x) = \alpha(x)\,g(x) \\ P v\big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

の解を $v(t,x)$ とすると $v \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ かつ $v = u$ in D．

1) v_i $(i=0,1,\cdots,n)$ の構成

(1-1) を t, x' について微分すると

$$(2\text{-}2)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(D_i u) = L(t)(D_i u) + (D_i L)(u) + (D_i f)(t,x) \\ (D_i u)(0,x) = g_i \\ P(D_i u)\big|_{x_n=0} = 0 \qquad (i=0,1,\dots,n-1), \end{cases}$$

$$D_n u = A_n^{-1}\left[D_0 u - \sum_{i=1}^{n-1} A_i (D_i u) - f\right].$$

但し $g_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ $(i=1,\dots,n-1)$, $g_0(x) = L(0)g + f(0,x)$.

従って $v_i(t,x)$ $(i=0,1,\dots,n)$ を次の連立方程式の解とする。

$$(2\text{-}3)\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} = L(t)v_i + \alpha(t,x)\left(\sum_{k=1}^{n} D_i A_k(t,x)\, v_k + \frac{\partial B}{\partial x_i} v\right) + \alpha(t,x)(D_i f) \\ v_i(0,x) = \alpha(x)\, g_i(x) \\ P v_i(t,x)\big|_{x_n=0} = 0 \qquad (i=0,1,\dots,n-1) \end{cases}$$

$$(2\text{-}3)'\quad v_n = \alpha(t,x)^2 A_n^{-1}\left[v_0 - \sum_{i=1}^{n-1} A_i v_i - Bv - f\right].$$

[仮定1-1]と逐次近似法を適用する事により $v_i(t,x)$ $(i=0,1,\dots n)$ は $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ の元として一意的に求まり，又有限伝播の性質より $v_i(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ in D なる事がわかる。

2) $v_{ij}(t,x)$ の構成

(1-1) に $D_i D_j$ $(0 \leq i,j \leq n-1)$ を作用させる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(D_i D_j u) = L(t)(D_i D_j u) + (D_i L)(D_j u) + (D_j L)(D_i u) \\ \qquad\qquad + (D_i D_j L)u + (D_i D_j f) \\ (D_i D_j u)(0,x) = g_{ij}(x) \\ P(D_i D_j u)\big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

$$D_i D_n u = A_n^{-1}\left[D_i D_0 u - \sum_{j=1}^{n-1} A_j\,(D_i D_j u) - B(D_i u) - (D_i L)u - D_i f\right],$$

従って $v_{ij}(t,x)$ は次の連立方程式の解とする.

$$(2\text{-}4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v_{ij} = L(t) v_{ij} + \alpha(t,x)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} D_j A_k \cdot v_{ik} + \sum_{k=1}^{n} D_i A_k \cdot v_{jk}\right) \\ \qquad + \alpha(t,x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} D_i D_j A_k \cdot v_k + \alpha(t,x)\, D_i B \cdot v_j \\ \qquad + \alpha(t,x)\, D_j B \cdot v_i + \alpha(t,x)\,(D_i D_j B)\cdot v + \alpha(t,x)\, D_i D_j f \\ v_{ij}(0,x) = \alpha(x)\, g_{ij}(x) \\ P v_{ij}\big|_{x_n=0} = 0 \qquad\qquad 0 \leqq i,j \leqq n-1, \end{cases}$$

$$(2\text{-}5)\quad v_{in} = \alpha(t,x)^2 A_n^{-1}\left[v_{0i} - \sum_{j=1}^{n-1} A_j v_{ij} - \sum_{k=1}^{n} D_i A_k \cdot v_k - B v_i - D_i B\cdot v - D_i f\right].$$

3) $v_{i_1\cdots i_m}(t,x)$ の構成.

$D_{i_1}\cdots D_{i_m}$ を (1-1) に作用させる. $(0 \leqq i_1, \cdots, i_m \leqq n-1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(D_{i_1}\cdots D_{i_m} u) = L(t)(D_{i_1}\cdots D_{i_m} u) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} D_{i_p} A_k\,[D_{i_1}\cdots \hat{D}_{i_p}\cdots D_{i_m} D_k u] \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p,q} D_{i_p} D_{i_q} A_k\,[D_{i_1}\cdots \hat{D}_{i_p}\cdots \hat{D}_{i_q}\cdots D_{i_m} D_k u] + \cdots \\ \qquad \cdots + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (D_{i_1}\cdots D_{i_m} A_k)\,[D_k u] + \sum_{p=1}^{m} D_{i_p} B\cdot [D_{i_1}\cdots \hat{D}_{i_p}\cdots D_{i_m} u] \\ \qquad + \cdots + D_{i_1}\cdots D_{i_m} B\cdot [u] + D_{i_1}\cdots D_{i_m} f \\ (D_{i_1}\cdots D_{i_m} u)(0,x) = g_{i_1\cdots i_m}(x) \quad \left(= \text{the initial value of } D_{i_1}\cdots D_{i_m} u(t,x)\right) \\ P(D_{i_1}\cdots D_{i_m} u)\big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} D_n u = A_n^{-1}\Big[& D_0 D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} u - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,(D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} D_k u) \\ & - \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m-1} D_{i_p} A_k\,[D_{i_1}\cdots \hat{D}_{i_p}\cdots D_{i_{m-1}} D_k u] - \cdots - \sum_{k=1}^{n} D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} A_k\,[D_k u] \\ & - B\,[D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} u] - \cdots - [D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} B]u - (D_{i_1}\cdots D_{i_{m-1}} f)(t,x). \end{aligned}$$

従って $v_{i_1\cdots i_m}(t.x)$ を次の様に定義する.

$0 \le i_1, \cdots, i_m \le n-1$ のとき

$$
(2\text{-}6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} v_{i_1\cdots i_m} = L(t)\, v_{i_1\cdots i_m} + \alpha(t.x)\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} (D_{i_p}A_k)\, v_{i_1\cdots\hat{i}_p\cdots i_m k} \\
&\qquad + \alpha(t.x)\sum_{k=1}^{n}\sum_{p,q} (D_{i_p}D_{i_q}A_k)\, v_{i_1\cdots\hat{i}_p\cdots\hat{i}_q\cdots i_m k} + \cdots \\
&\qquad \cdots + \alpha(t.x)\sum_{k=1}^{n} (D_{i_1}\cdots D_{i_m}A_k)\, v_k + \alpha(t.x)\sum_{p=1}^{m}(D_{i_p}B)\, v_{i_1\cdots\hat{i}_p\cdots i_m} \\
&\qquad + \cdots + \alpha(t.x)\,(D_{i_1}\cdots D_{i_m}B)\, v + \alpha(t.x)\, D_{i_1}\cdots D_{i_m} f \\
&v_{i_1\cdots i_m}(t_0.x) = \alpha(x)\, g_{i_1\cdots i_m}(x) \\
&P\, v_{\cancel{i_1\cdots i_m}}\big|_{x_n=0} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$\{i_1,\cdots,i_m\} \ni n$ のとき

$$
\begin{aligned}
(2\text{-}7)\quad v_{i_1\cdots i_{m-1} n} &= \alpha(t.x)^2 A_n^{-1}\Big[\, v_{0 i_1\cdots i_{m-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\, v_{i_1\cdots i_{m-1}k} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m-1} D_{i_p}A_k\, v_{i_1\cdots\hat{i}_p\cdots i_{m-1}k} - \cdots - \sum_{k=1}^{m} D_{i_1}\cdots D_{i_m}A_k\cdot v_k \\
&\quad - B\, v_{i_1\cdots i_m} - \cdots - (D_{i_1}\cdots D_{i_m})B\cdot v - (D_{i_1}\cdots D_{i_m} f)\Big].
\end{aligned}
$$

連立方程式(2-6)(2-7)の解として $v_{i_1\cdots i_m}(t.x)$ を決める.

次に[仮定1-1]を用いて $v_{i_1\cdots i_m}(t.x)$ を評価していく.

$$
\phi_{m-\ell,\ell}(t) = \sum_{i_1\cdots i_{m-\ell}=0}^{n-1} \| v_{i_1\cdots i_{m-\ell}\underbrace{n\cdots n}_{\ell}}(t) \| \qquad (\ell = 0, 1, \cdots, m)
$$

とおく.

support of α で与えられた data はすべて analytic なので次の様な評価式が成立する事がわかる.

$$
\left\{\ |\alpha(t.x)\, D_{i_1}\cdots D_{i_p} A_k| \le p!\, a^p K \qquad (k=1,\cdots,n)\right.
$$

$$
(2\text{-}8)\begin{cases}
|\alpha(t,x)\, D_{i_1}\cdots D_{i_p} B| \leq p!\, a^p \cdot K \\
|\alpha(t,x)\quad A_n^{-1}\quad| \leq \quad K \\
\|\alpha(t)\, D_{i_1}\cdots D_{i_p} f(t)\| \leq p!\, a^p \cdot K\sigma \\
\phi_{m,0}(0) \leq m!\, p^m \cdot A
\end{cases}
$$

但し，a，p，K，A は正の定数，$M=[m_{ij}]$ を $N\times N$ 行列とすれば $|M| \underset{\mathrm{def.}}{=} \sup_{i,j} |m_{ij}|$，$\|M\|$ を行列 norm $(=\sup_{\|u\|=1}\|Mu\|)$ とすれば σ は $\|M\| \leq \sigma |M|$ を満たす N にのみ依存する正の定数。

このとき次の Lemma が成立する。

［Lemma 2-1］ μ_0, c_0, d_0, $a\cdot n$, A 及び $\gamma_1 = K\sigma/2$ はすべて 1 より大、かつ $p \geqq 3\cdot an(1+p_1)$，$p_1 = an(1+\gamma_1^2)\gamma_1 d_0 + \gamma_1^2$ とすれば $\phi_{m,0}(t) + \phi_{m-1,1}(t)$ は $m \geqq 1$ のとき次の不等式を満す。

$$
(2\text{-}9)\quad \phi_{m,0}(t) + \phi_{m-1,1}(t) \leq m!\left(p(1+t)\, e^{an\gamma_1(1+\gamma_1^2)d_0 t}\right)^m 3\cdot(1+\gamma_1^2)c_0 A e^{\mu_0 t}.
$$

［証明］ m に関して帰納法で示す．まず $v(t)$ を評価する。

(2-1) に［仮定 1-1］を適用すると

$$
\|v(t)\| \leq c_0 e^{\mu_0 t}\|\alpha g\| + d_0\int_0^t e^{\mu_0(t-s)}\|\alpha(s) f(s)\|ds \leq l_0 e^{\mu_0 t}.
$$

ここで $l_0 = c_0 A + d_0\gamma_1/2\mu_0$.

(2-3) より $i=0,1,\cdots,n-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\|v_i(t)\| \leq{}& c_0 e^{\mu_0 t}\|g_i\| + d_0\int_0^t e^{\mu_0(t-s)}\Big\{\sigma\sum_{j=1}^{n}|\alpha D_i A_j|\cdot\|v_j\| \\
&+ \sigma|\alpha D_i B|\cdot\|v\| + \|\alpha D_i f\|\Big\}ds \\
\leq{}& c_0 e^{\mu_0 t}\|g_i\| + aK\sigma\, d_0\int_0^t e^{\mu_0(t-s)}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\|v_j\| + \|v\| + 1\Big)ds,
\end{aligned}
$$

一方 (2-3)′ より

$$\|v(t)\| \leqq (\sigma K)^2 \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \|v_j\| + \|v(t)\| + 1 \right\},$$

従って

$$\phi_{1,0}(t) \leqq C_0 e^{\mu_0 t} \cdot \phi_{1,0}(0) + anK\sigma d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \left\{ \phi_{1,0}(s) + \phi_{0,1}(s) + \|v(s)\| + 1 \right\} ds,$$

$$\phi_{0,1}(t) \leqq (\sigma K)^2 \left\{ \phi_{1,0}(t) + \|v(t)\| + 1 \right\},$$

これから $m=1$ に対する (2-9) が得られる。

次に $(m-1)$ まで (2-9) が成立すると仮定し、m のとき (2-9) が成立する事を示す。(2-6) から $0 \leqq i_1, \ldots, i_m \leqq n-1$ のとき

$$\|v_{i_1 \cdots i_m}(t)\| \leqq C_0 e^{\mu_0 t} \|v_{i_1 \cdots i_m}(0)\| + d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \Big[$$

$$aK\sigma \sum_k \sum_p \|v_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_m k}\| + 2!\, a^2 K\sigma \sum_{k,} \sum_{p \cdot q} \|v_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots \hat{i}_q \cdots i_m k}\|$$

$$+ \cdots + m!\, a^m K\sigma \sum_k \|v_k\| + aK\sigma \sum_p \|v_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_m}\|$$

$$+ \cdots + m!\, a^m K\sigma \|v(s)\| + m!\, a^m K\sigma \Big] ds,$$

これを $i_1 \cdots i_m$ について 0 から $n-1$ まで加えると

$$\text{(2-10)} \quad \phi_{m,0}(t) \leqq C_0 e^{\mu_0 t} \phi_{m,0}(0) + d_0 \gamma_1 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \Big[m!\,(an)^m (1 + \|v(s)\|)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} k!\, (an)^k \binom{m}{k} (\phi_{m+1-k,0}(s) + \phi_{m-k,1}(s)) \Big] ds.$$

(2-7) より

$$\|v_{i_1 \cdots i_{m-1} n}(t)\| \leqq K\sigma \Big\{ \|v_{0 i_1 \cdots i_{m-1}}\| + K\sigma \sum_{k=1}^{m-1} \|v_{i_1 \cdots i_{m-1} k}\| + \cdots$$

$$\cdots + (m-1)!\, a^{m-1} K\sigma \sum_{k=1}^{n} \|v_k\| + K\sigma \|v_{i_1 \cdots i_{m-1}}\|$$

$$+ aK\sigma \sum_{p=1}^{m-1} \|v_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_{m-1}}(t)\| + \cdots + (m-1)!\, a^{m-1} K\sigma \|v(s)\|$$

$$+ (m-1)!\, a^{m-1} \cdot K\sigma \Big\}.$$

$i_{m-l+1}=\cdots=i_{m-1}=n$とおき、$i_1,\cdots,i_{m-l}$について$0$から$n-1$まで加える事により次の不等式が得られる。

$$(2\text{-}11)\quad \phi_{m-l,l}(t)\leqq \gamma_1^2\Big\{\phi_{m-l+1,l-1}(t)+\sum_{k=1}^{m-1}k!\binom{m-1}{k}(an)^k\sum_{i=0}^{l}\phi_{m-k-i,i}(t)$$
$$+(m-1)!(an)^{m-1}\cdot(1+\|v(0)\|)\Big\},$$

(2-10) 及び $l=1$ のときの (2-11) を結びつける事により一般の m に対して (2-9) が成立する事がわかる　(証終).

l に関する帰納法によって (2-11) から次の不等式を得る.

$$(2\text{-}12)\quad \phi_m(t)=\sum_{i_1\cdots i_m=0}^{n}\|v_{i_1\cdots i_m}\|=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\phi_{m-k,k}\leqq m!\,\rho_0^m\cdot A_0$$

$$\rho_0=2(1+3\gamma_1^2)\rho(1+t)e^{an\gamma_1(1+\gamma_1^2)d_0t},\quad A_0=3(1+\gamma_1^2)C_0Ae^{\mu_0t}.$$

(4-12) より $D_{i_1}\cdots D_{i_m}u$ の maximum norm の評価をする。

そのとき Sobolev の Lemma を少し変形して使う。$U(\subset V)$ を (t_0,x_0) の近傍で $U\subset D$ とする。$\beta(t,x)\in C_0^\infty(R^{n+1})$ を $\beta\equiv 1$ on U かつ $\operatorname{supp}[\beta]\subset D$ とする。$B=\operatorname{supp}(\beta)$ とかくなら Sobolev の Lemma より

$$\sup_U|u(x)|\leqq\sup_B|\beta u|\leqq C\sum_{|\nu|\leqq[\frac{n+1}{2}]+1}\|D^\nu u\|_{L^2(B)}$$

となる。C は β と n にのみ depend する正の定数。

一方、$v_{i_1\cdots i_m}=D_{i_1}\cdots D_{i_m}u$ in a nbd of D なので

$$\sum_{i_1\cdots i_m}\sup_U|D_{i_1}\cdots D_{i_m}u|\leqq C\sum_{i_1\cdots i_m}\sum_{|\nu|\leqq[\frac{n+1}{2}]+1}\|D^\nu v_{i_1\cdots i_m}\|_{L^2(B)}$$
$$\leqq \text{const.}\sum_{i_1\cdots i_m,i_{m+1},\cdots i_{m+[\frac{n+1}{2}]+1}}\|v_{i_1\cdots i_m i_{m+1}\cdots i_{m+[\frac{n+1}{2}]+1}}\|_{L^2(B)}$$
$$\leqq \text{const.}\left(m+[\tfrac{n+1}{2}]+1\right)!\,\rho'^{\,m+[\frac{n+1}{2}]+1}\cdot A'.$$

従って u は (t_0,x_0) で (t,x) に関して analytic である (証終)

§.3. Symmetric hyperbolic systems

$A_i(t,x)$ $(i=1,\cdots,n)$ が Hermite 行列，かつ A_n は正則行列であり、$\mathrm{Ker}\,P$ は $L(t)$ に対して maximal non-positive，即ち $-A_n(t,x',0)$ が非正となる C^N の subspace の中で極大のものであるならば、この方程式系は[仮定1-1]，[仮定1-2]，[仮定1-3]を満足する事を証明する。

§.2 の証明の所で触れた様に $P(t,x')$ は [E.e. 0] と思い議論を進めていく。係数は $\mathcal{B}^m(V)$ (mは十分大) に属すると仮定しておく。

$\boxed{1}$ L が t に independent のとき

L の $L^2(R^n_+)$ での定義域 $\mathcal{D}(L)$ を $\{u(x)\in H^1(R^n_+);\ Pu|_{x_n=0}=0\}$ の graph norm $\|Lu\|+\|u\|$ による closure とすれば，Lax and Phillips [2] の結果より L は $L^2(R^n_+)$ での或る semi-group $\{T(t)\}$ の生成作用素となる。これより $g\in\mathcal{D}(L)$，$f(t,x)\in\mathcal{E}^1_t(L^2)$ のとき $\mathcal{E}^1_t(L^2)\cap\mathcal{D}(L)$ に入る (1-1) の解 $u(t,x)$ が次の様に一意的に決まる，

$$(3\text{-}1)\qquad u(t,x)=T(t)g+\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\ .$$

従って x-方向に regularity を上げる事を論じる。(1-1) を x で形式的に微分したとき $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ を未知函数 v_i でおきかえて得られる次の様な方程式を考える，

$$(3\text{-}2)\begin{cases}\dfrac{\partial v_i}{\partial t}=Lv_i+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}v_k+\frac{\partial B}{\partial x_i}u+\frac{\partial f}{\partial x_i}\\ v_i(0,x)=\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\\ Pv_i|_{x_n=0}=0 \qquad\qquad (i=1,\cdots,n-1)\end{cases}$$

$$(3\text{-}3)\quad v_n=A_n^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-Bu-f-\sum_{k=1}^{n-1}A_kv_k\right]$$

$g \in H^2(R^n_+)$, $f(t,x) \in \mathcal{E}^2_t(L^2) \cap \mathcal{E}^1_t(H^1)$ で g, f が order 1 の compatibility 条件を満足するならば (3-1) より $u(t,x) \in \mathcal{E}^2_t(L^2) \cap \mathcal{D}(L)$. 従って逐次近似法により $\mathcal{E}^1_t(L^2)$ に入る (3-2), (3-3) の解 $v_1, \cdots, v_n$ が一意的に定まる。一方 $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ が Kajitani [1] と同様にして証明出来る。よってこのとき (1-1) の解 $u(t,x)$ は $\mathcal{E}^1_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$ に入り (1-4), (1-5) タイプの不等式及び次の不等式を満足する。

$$(3\text{-}4) \quad |||u(t)|||_{1,0} \leq e^{\mu_1 t} |||u(0)|||_{1,0} + \alpha \int_0^t e^{\mu_1(t-s)} |||f(s)|||_{1,0}\, ds .$$

$$\text{where } |||u(t)|||_{1,0} = \|u'(t)\| + \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right\| .$$

次に g, f に対する仮定を弱める. 従って $g(x) \in H^1(R^n_+) \cap \mathcal{D}(L)$, $f(t,x) \in \mathcal{E}^1_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$ とする。 $g_m \in H^2(R^n_+)$, $f_m \in \mathcal{E}^2_t(L^2) \cap \mathcal{E}^1_t(H^1)$ かつ g_m, f_m は order 1 の compatibility 条件を満たし $g_m \xrightarrow{m\to\infty} g$ in $H^1(R^n_+)$, $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in $\mathcal{E}^1_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$ となる函数列 g_m, f_m が存在する。 g_m, f_m に対する (1-1) の解を $u_m(t,x)$ とすれば (1-5) タイプのエネルギー不等式より $u_m(t,x)$ は $\mathcal{E}^1_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$ での収束列となる。その極限函数を $u(t,x)$ とすると u は明らかに $\{g, f\}$ に対応する (1-1) の解で [A.1-1] を満足する。

$\boxed{2}$ L が t に depend するとき.

$g(x) \equiv 0$, $f(t,x) \in \mathcal{E}^1_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$ かつ $f(0,x) \equiv 0$ のとき [A.1-1] の事実が成立すると仮定する。すると $g(x) \in H^3(R^n_+)$, $f(t,x) \in \mathcal{E}^2_t(L^2) \cap \mathcal{E}^1_t(H^1) \cap \mathcal{E}^0_t(H^2)$ かつ g, f が order 1 の compatibility 条件を満たすと仮定すれば $v(t,x) = u(t,x) - g(x) - t\big(L(0)g + f(0,x)\big)$

は次の方程式を満足する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = L(t)\, v + F(t, x) \quad ; \quad F \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1), \quad F(0, x) \equiv 0, \\ v(0, x) = 0 \\ P\, v \big|_{x_n = 0} = 0 \end{cases}$$

従って最初の仮定より $v(t, x) \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ が一意的に定まる。これより g, f に対応する (1-1) の解 $u(t, x) \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ が求まる。解が $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ に入っていると boundary 条件が maximal non-positive なので (1-4), (1-5) タイプの不等式を満たす事はすぐわかる。この事実より $g \in H^1(R_+^n) \cap \mathcal{D}(L)$, $f \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ と g, f の仮定を弱める事は易しい。方法はこの §. の 1 で述べたのと同様なので省略する。故に一般性を失う事なく $g \equiv 0$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$, $f(0, x) \equiv 0$ と仮定する。このとき $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ に入る解 $u(t, x)$ が存在する事を証明する。Cauchy の折線により示す。$\Omega = [0, T] \times R_+^n$ とおく。

$[0, T]$ の m 等分割 $\Delta_m : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T$ に対して次の様に Cauchy の折線 $u_m(t, x)$ を構成する。

$u_{m,i}(t, x)$ は $(i \geq 1)$ $[t_{i-1}, t_i]$ で def. された次の方程式の解とする。そのとき $u_{m,0}(t_0) = g(x)$ である。

$$(3\text{-}5) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_{m,i}(t, x) = L(t_{i-1})\, u_{m,i} + f(t, x) \\ u_{m,i}(t_{i-1}) = u_{m,i-1}(t_{i-1}) \\ P\, u_{m,i} \big|_{x_n = 0} = 0 \end{cases}$$

$$u_m(t,x) = u_{m,i}(t,x) \qquad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (i=1, \cdots m)$$

と此する。 $u_m \in \mathcal{E}_t^0(H^1)$, $u_m \in \mathcal{E}_t^1(L^2)$ $(t \neq t_i)$ である事がすぐわかる。不等式 (3-4) を各 $u_{m,i}(t,x)$ に適用し、それを合成していく事により $\{u_m(t,x)\}$ は $H^1(\Omega)$ の有界列となる事がわかる。従ってもし必要あらば部分列をとる事により $\{u_m(t,x)\}$ は $H^1(\Omega)$ のある函数 $u(t,x)$ に弱収束する事がわかる。

そして $u(t,x)$ は次の方程式を満たす。

$$(3\text{-}6)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u = L(t)\,u + f & \text{in} \quad L^2(\Omega) \\ u(0,x) = g(x) \equiv 0 & \text{in} \quad L^2(R_+^n) \\ Pu\,\big|_{x_n=0} = 0 & \text{in} \quad H^{\frac{1}{2}}(R_+^1 \times R^{n-1}) \end{cases}.$$

一方 $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqq \varliminf_{m\to\infty} \|u_m\|_{H^1(\Omega)}$ なので

$$(3\text{-}7) \qquad \int_{(0,\delta)\times R_+^n} |u(t,x)|^2\, dt\, dx \leqq \text{const.}\ \delta^2$$

この $u(t,x)$ が $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ に入る事を mollifier とエネルギー不等式とにより証明する。

$\rho(t) \in C_0^\infty(R^1)$, $\text{supp}[\rho] \subset [-2,-1]$, $\int \rho(t)\,dt = 1$, $\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{t}{\varepsilon})$

$\varphi_\varepsilon(t,x') = \rho_\varepsilon(t) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \rho_\varepsilon(x_j)$ とおき φ_ε と u との合成積を $u_\varepsilon(t,x)$ とおく。 $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$, ε_0 は十分小な正の定数$)$

$u_\varepsilon(t,x) \in \mathcal{E}_t^\infty(H^1)$. $t \in [0, T-\varepsilon_0]$ であり、更に、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = L(t)\,u_\varepsilon + f_\varepsilon + C_\varepsilon u \\ u_\varepsilon(0,x) = g_\varepsilon(x) \\ Pu_\varepsilon\,\big|_{x_n=0} = 0 \end{cases},$$

where $C_\varepsilon u = [\varphi_{\varepsilon(t,x')}^*, L(t)]u$, $g_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(s,y')\, u(-s, x'-y', x_n)\, ds\, dy'$

これより次のエネルギー不等式が得られる。

(3-8) $|||u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)|||_{1,0} \leqq e^{\mu_1 t}|||u_\varepsilon(0)-u_{\varepsilon'}(0)|||_{1,0}$

$$+ \text{const.} \int_0^t e^{\mu_1(t-s)}\left\{|||f_\varepsilon(s)-f_{\varepsilon'}(s)|||_{1,0} + |||C_\varepsilon u - C_{\varepsilon'} u|||_{1,0}\right\} ds,$$

(3-9) $|||u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)|||_1 \leqq \text{const.}\, |||u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon'}(t)|||_{1,0}$

$$+ \text{const.}\left\{\|f_\varepsilon(t)-f_{\varepsilon'}(t)\| + \|C_\varepsilon u(t) - C_{\varepsilon'} u(t)\|\right\}.$$

(3-7) より $\lim_{\varepsilon\to 0} |||u_\varepsilon(0)|||_{1,0} = 0$ である。又 (3-8), (3-8)′ の右辺に表われる他の量も $\varepsilon, \varepsilon' \longrightarrow 0$ のとき 0 に収束する事がすぐわかる。従って $u_\varepsilon(t,x)$ は $\varepsilon \to +0$ のとき $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ での収束列となる事がわかる。その極限函数が $u(t,x)$ となる事は明らか。よって L が t に depend する場合も [A.1-1] は成立する。

[A.1-2] 即ち伝播速度が有限である事はまだ証明していないが、方法は双曲型 Cauchy 問題の場合をそのまま適用すれば出来るので省略する。 (終)

参考文献

[1] K. Kajitani ; First Order hyperbolic systems : Jour. Math. Kyoto Univ. 11

[2] Lax and Phillips : Local boundary conditions for dissipative symmetric systems ; C. P. A. M. vol. 13 (1960) p. 427-455

[3] S. Mizohata : Analyticity of solutions of hyperbolic systems, C. P. A. M. 14

[4] M. Ikawa : A mixed problems for hyperbolic equations ---- Publ, R. I. M. S, Kyoto Univ. vol 5. p. 119-147.