数理解析研究所講究録
第160巻 1972年 61-67

Schrödinger型作用素の正の固有値と一意接続定理

（東大・理） 増田久弥

この講演の目的は，

$$Lu \equiv -\sum \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i b_j(x)\right) a_{jk}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i b_k(x)\right) u - qu$$

が，適当な係数に対する条件の下で，L^2での，正の"固有値"をもたないことを，次の簡単な場合について，示すことにあります。

(1) $\Delta u + qu + k^2 u = 0 \quad (x \in \Omega)$
$k > 0$

（Ωは，$|x| \geqq R_0$を含む領域）

(1)については，例えば，

F. Rellich (Jahresber. Deutch. Math. Verein. 1943)
$q = 0$の場合：

T. Kato (C. P. A. M. 1959) $q = O\left(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$
$r = |x|$.

S. Agmon (J. d'anal. Math. 1970)

$$q = q_0 + q_1$$

$$q_0 = o(1),\quad \frac{\partial q_0}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right),\quad q_1 = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

の場合を，(大ざっぱにいえば)扱った。

変数係数の場合，

S. Roze (Mat. Sb. 1969)　$q = o\left(\frac{1}{r}\right)$, $b_j \equiv 0$.

Ikebe-Uchiyama (R.I.M.S. 1971)　$b_j \not\equiv 0$. $q = o\left(\frac{1}{r}\right)$

を扱っている。

さて，(1)のポテンシャル q に対し次の仮定をおく。

仮定　$q = q_0 + q_1$

(2)　$q_0 = o(1),\quad \frac{\partial q_0}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right),\quad q_1 = o\left(\frac{1}{r}\right)$

$(r = |x| \to \infty)$

ラプラス作用素 Δ を，極座標表をすると，

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\Lambda$$

(N; 次元，Λ は $N-1$ 次元球面上の Laplace-Beltrami 作用素)。よって (1) は，

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\Lambda u + qu + k^2u = 0$$

となる。変換

$$v = r^{\frac{N-1}{2}} u$$

をすると、 v は、次の方程式をみたす；

$$(3) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \Lambda v + \left(q - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + k^2 \right) v = 0$$

さて、 $\frac{k}{2} > \varepsilon > 0$ なる $\underline{\varepsilon}$ を任意に固定する。

$$q = q_0 + q_1 = q_0 + \frac{\varepsilon}{r} + q_1 - \frac{\varepsilon}{r}$$

と分解し、

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{r^2} \Lambda - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + q_0 + \frac{\varepsilon}{r} + k^2 \\ A_1 = q_1 - \frac{\varepsilon}{r} \end{cases}$$

とおく。 (3) は、

$$(4) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + A_0 v + A_1 v = 0 \qquad r \geq R_0$$

なる、Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(S_{N-1})$ (S_{N-1} は $N-1$ 次元単位球面) の中の常微分方程式と考えられる。

A_0、A_1 は次の性質をもつ。十分大きな R_1 が存在して、$r > R_1$ に対して、

$$(5) \quad \left| q_1 - \frac{\varepsilon}{r} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{r}, \text{ i.e. } (A_1 y, y) \leq \frac{2\varepsilon}{r} \|y\|^2$$

$$(6) \quad -(A_1 y, y) \geq \frac{\varepsilon}{r} \|y\|^2$$

$$(7)\quad (\dot{A}_0 y, y) + 2\,\mathrm{Re}(A_1 y, z) \geq -\frac{4\varepsilon}{kr}\{\|z\|^2 + (A_0 y, y)\}.$$

$$(\forall z \in L^2(S_{N-1}),\ \ \forall y \in D(A_0))$$

ここで、$\dot{A}_0$ は、r について微分した作用素を表わす。

さて、一般的にヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ の中で、

$$(8)\quad \frac{d^2u}{dr^2} + \mu(r)\frac{du}{dr} + A_0(r)u + A_1(r)u = 0 \qquad r \geq R_0$$

なる常微分方程式を考えよう。ここで、

$\boxed{\text{仮定 1}}$

(i) $\mu(r) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$

(ii) 各 r に対し、$A_0(r)$ は、対称(閉)作用素で、その定義域は、一定 $(\equiv D_0)$

(iii) 各 $y \in D_0$ に対して、$A_0(r)y$ は、$r \geq R_0$ につき、連続的に(強)微分可能；$\frac{d}{dr}A_0(r)y \equiv \dot{A}_0(r)y$

(iv) $D(A_1(r))$ は、D_0 を含む。

$\boxed{\text{仮定 2}}$ 次の如き、$\gamma(t) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$ があって、

$\|z\|^2 + (A_0 y, y) > 0$ なる任意の $\{y, z\}$
$\in D_0 \times \mathbb{H}$ に対して、評価

$$\mu(r)\|z\|^2 + (\dot{A}_0 y, y) + 2\,\mathrm{Re}(A_1 y, z) \geq -\gamma(r)\left[\|z\|^2 + (A_0 y, y)\right]$$

が成立する。

$\boxed{\text{仮定3}}$ $\lambda(r) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$ があって、

$$-(A_1 y, y) \geq \lambda(r)\|y\|^2 \quad (\forall y \in D_0)$$

が成立。

この時、

定理. 上の仮定1〜3の下で、(8)の解 u は、次の評価をみたす。

(I) ある r_0 があって、

$$\|u_r(r_0)\|^2 + (A_0(r_0)u(r_0), u(r_0)) > 0$$
$$(u_r = du/dr = u')$$

ならば、ある定数 $C > 0$ があって、

$$\|u_r(r)\|^2 + (A_0(r)u(r), u(r)) \geq C\, e^{-\int_{r_0}^{r}\gamma(\rho)d\rho}$$
$$r \geq r_0.$$

(II) $\forall r \geq R_0$ に対して、

$$\|u_r\|^2 + (A_0 u, u) \leq 0$$

ならば、ある定数 $C_1 > 0$ C_2 があって、

$$\boxed{\|u(r)\|^2 \geq C_1 \exp\left(C_2 \int_{R_0}^{r} e^{\int_{R_0}^{\rho} \mu(\sigma)d\sigma} + \int_{R_0}^{r} \lambda(\rho) \underbrace{e^{\int_{\rho}^{r} \mu(\sigma)d\sigma}}_{(r-\rho)} d\rho \right)}$$

これを、承認しよう。その時、(1) の non-trivial な L^2-解は、存在しないことが示される。u を (1) の L^2-解非0とする。この時、

$$\int_{\Omega}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx < \infty$$

と仮定してもいい。$v = r^{\frac{N-1}{2}}u$ は、(4)の解であるから、これは、(8) の特別な場合である;

$$\mu(r) \equiv 0. \quad A_0 = \frac{\Lambda}{r^2} + q_0 - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r} + k^2$$

$$A_1 = q_2 - \frac{\varepsilon}{r}, \quad \lambda(r) = \frac{\varepsilon}{2r}, \quad \gamma(r) = -\frac{4\varepsilon}{kr}.$$

(7), (8), (9) より仮定1〜3 を上に定めた A_0, A_1 はみたしている。故に、

(II) $\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) \leq 0$ ($\forall r \geq R_0$) の場合.

$$\|v(r)\|^2 \geq c\, e^{-C(r-r_0) + \frac{\varepsilon}{2} r(\log r - 1)}$$

$$\therefore \|u(r)\|^2_{L^2(S_{N-1})} \geq C\, r^{-N+1} e^{\frac{\varepsilon}{4} r \log r}$$

(r〜十分大)

これは、$u \in L^2(\Omega)$ に反する。

(I) $\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) > 0 \quad (\exists r > R_0)$ の場合；

$$\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) \geq \frac{\text{Const.}}{r^{\delta}}$$

$$(\delta \equiv 4\varepsilon / k)$$

を得る。 $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$ より

$$(A_0 v, v) \leq \text{Const.} \|v\|^2 \leq \text{Const.}\, r^{N-1} \|u\|^2,$$

$$\|v_r\|^2 \leq r^{N-1} \left\| u_r - \frac{N-1}{2r} u \right\|^2 \leq \text{Const.}\, r^{N-1} (\|u_r\|^2 + \|u\|^2)$$

故に，

$$\|u_r\|^2 + \|u\|^2 \geq \frac{\text{Const.}}{r^{N-1+\delta}}$$

を得る．

$$\therefore \int_{R_1 \leq |x| \leq R} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx \geq \text{Const.}\, R^{1-\delta}$$

となって，~~矛盾する~~ 故に non-trivial な L^2 解は存在しない。

$u \equiv 0$ in $|x| \geq R_1$
解の一意接続定理から
$u \equiv 0$ in Ω.