数理解析研究所講究録
第 160 巻 1972 年 68-78

Banach lattice における非線型半群とその例

東大理　小西芳雄

すでに短期共同研究で発表したものや これから詳細を発表する予定の結果を証明を付けずに述べます。[1)]

§1 半群の生成

X Banach lattice $\ni f, g, \cdots$

$$\varphi(f, g) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\|(f+\varepsilon g)^+\| - \|f^+\|}{\varepsilon}$$

定義 (Konishi [8], Sato [20])

$A: D(A) \subset X \longrightarrow X$ dispersive

$\Longleftrightarrow \varphi(f-g, -Af+Ag) \geq 0 \quad \forall f, g \in D(A)$

(この形の定義は佐藤氏の忠告による)

1) 「半群と発展方程式」(1971年7月), 「Navier-Stokes 方程式等の位相解析的数値解析的研究」(1971年11月), 「生物モデルの数学」(1972年2月).

命題(Sato [19])

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X \quad \text{dispersive}$$

$$\Longleftrightarrow \|((f-\lambda Af)-(g-\lambda Ag))^+\| \geq \|(f-g)^+\|$$

$$\forall\lambda > 0, \quad \forall f, g \in D(A)$$

定理(Konishi [8], cf. Crandall-Liggett [5])

(i) $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ dispersive

(ii) $\overline{D(A)} = X$

(iii) $R(I-\lambda A) = X \qquad \forall\lambda > 0$

$$\Rightarrow e^{tA}f = \text{s-}\lim_{\lambda\downarrow 0}(I-\lambda A)^{-[t/\lambda]}f, \quad t \geqq 0, f \in X$$

(収束は $t \geq 0$ に関し広義一様)

が存在し $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ は X 上の保順序半群である:

(a) $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$, $t, s \geq 0$ (半群性)

$e^{0A} = I$

(b) $\text{s-}\lim_{t\downarrow 0} e^{tA}f = f$, $f \in X$ ((C_0) 性)

(c) $\|(e^{tA}f - e^{tA}g)^+\| \leqq \|(f-g)^+\|$, $f, g \in X, t \geqq 0$

(保順序性)

と初期値に対する連続的な依存

§2 若干の例

条件(i)を具体的な函数空間で調べ例を計算する事はSato [20]により行なわれている。作用素の定義域をきちんと

決定し(iii)を導くことが重要となる。我々は特に非反射的な空間について，例を述べよう。2)

<u>連続函数の空間での例</u>

<u>例1</u> 非線型熱方程式：$\partial u/\partial t - \Delta u + \gamma(u) = 0$

E 第二可算公理を満たす局所コンパクトHausdorff空間

$\hat{E} = E \cup \{\Delta\}$ Eの一点コンパクト化

$X = C_0(\hat{E}) \equiv \{ f \,;\, \hat{E}$上連続 且 $f(\Delta) = 0 \}$

<u>補題</u>（Sato [18]）

$$\varphi(f, g) = \begin{cases} \max\limits_{x;\, f(x) = \|f^+\|} g(x) & f^+ \neq 0 \\ \max\limits_{x;\, f(x) = 0} g^+(x) & f \leq 0 \text{ 且 } \exists x \; f(x) = 0 \\ 0 & \forall x,\; f(x) < 0 \end{cases}$$

---

2) 高村[7]が提起しているように，こうして構成した $e^{tA}f$ がいかなる意味で微分方程式 $du/dt = Au,\ u(0) = f$ の解となっているかを考えることが次に大事な問題となる；具体的な方程式についてのこの方向（即ち[7]の問題II）の研究としてCrandall[註4)]やKonishi [12]を参照。（一般論は未確立！）.

<u>補題</u> (cf. Sato-Ueno [17])

$A : D(A) \subset C_0(\hat{E}) \longrightarrow C_0(\hat{E})$ dispersive

$\Updownarrow$

$u, v \in D(A)$ 且 $\sup(u-v) > 0$ なるものに対し

$\exists x_0 \in E \quad u(x_0) - v(x_0) = \sup(u-v)$ 且

$(Au - Av)(x_0) \leq 0$

Λ $C_0(\hat{E})$上のFeller半群の生成作用素

γ R^1上の単調非減少連続函数, $\gamma(0)=0$

<u>命題</u> (Webb [23], Konishi [9])

$$\left.\begin{aligned} &D(A) = D(\Lambda) \\ &Au = \Lambda u - \gamma(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(i), (ii), (iii)}$$

且

(iv) $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ は <u>劣 Markov 半群</u> である:

「$f \leq c \Rightarrow e^{tA} f \leq c$」 $\quad \forall c \in [0, \infty)$

且

「$f \geq c' \Rightarrow e^{tA} f \geq c'$」 $\quad \forall c' \in (-\infty, 0]$

<u>例 2</u> u及び$\partial u/\partial t$に非線型性のある熱方程式

(Strauss [21,22]) : $\varphi(\partial u/\partial t) - \Delta u + \gamma(u) = 0$

$\Omega \subset R^d$ 有界領域　$\partial\Omega$ 滑らか

$X = C_0(\Omega) \equiv \{f ; \overline{\Omega}$ 上連続且 $f|_{\partial\Omega} = 0\}$

$\beta (= \varphi^{-1})$ R^1 上の単調増加連続函数，$\beta(0)=0$

且 $R(\beta) = R^1$

γ 例1と同じ

<u>命題</u>(Konishi [10])

$D(A) = \{ u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,d+1}(\Omega) ; \Delta u \in C_0(\Omega) \}$

$Au = \beta(\Delta u - \gamma(u))$

$\Longrightarrow$ (i), (ii), (iii), (iv)

($\Delta|_{D(A)}$ が半群を生成することは Masuda [15] による).

<u>註</u>. Masuda [15] を使うと Δ のかわりにもっと一般の変数係数の二階楕円型作用素でもよい。さらに，抽象的には，(Pazy [16] の意味で)コンパクトな (C_0) 級非負縮小半群の生成作用素でもよい.

<u>例3</u> ロケットの気体の熱焼(Forsythe-Wasow [6]): $\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 + F(\partial u/\partial x) = 0$

$X = C_{2\pi}(-\infty, \infty) \equiv \{f ; R^1$ 上連続且周期 $2\pi\}$

F R^1 上の非負連続函数で $F(0) = 0$

命題

$D(A)=\{u \in C_{2\pi}(-\infty,\infty)\ ;\ u',\ u'' \in C_{2\pi}(-\infty,\infty)\}$

$Au = u'' - F(u')$

$\Longrightarrow$ (i), (ii), (iii), (iv)

例4 一階非線型方程式 (Кружков [13], 相沢 [11]) $\partial u/\partial t = \beta(\partial u/\partial x)$

$X = C_0(R^+ \cup \{\infty\})\ R^+ = [0,\infty)$

β 例2と同じ

命題

$D(A)=\{u \in C_0(R^+ \cup \{\infty\})\ \ u' \in C_0(R^+ \cup \{\infty\})\}$

$Au = \beta(u')$

$\Longrightarrow$ (i), (ii), (iii), (iv)

L^1 での例

例5 非線型熱方程式 $\partial u/\partial t - \Lambda u + \gamma(u) = 0$

$(S, \mathcal{B}, m)$ 測度空间 $m(S) < \infty$

$X = L^1(S)$

補題 (Sato [18])

$$\varphi(f,g)=\int_{\{x\in S\,;\,f(x)>0\}} g(x)\,m(dx)+\int_{\{x\in S\,;\,f(x)=0\}} g^{+}(x)\,m(dx)$$

Λ　$L^1(S)$ 上の (Kunita [14] の意味で) 劣 Markov な縮小半群の生成作用素

γ　例 1 と同じ

命題 (Konishi [9,11], Brezis-Strauss [3])

$D(A)=D(\Lambda)\cap\{u\in L^1(S)\,;\,\gamma(u)\in L^1(S)\}$

$Au=\Lambda u-\gamma(u)$

$\Longrightarrow$ (i), (ii), (iii), (iv)

(Brezis氏は[11]の結果を含む, 多価の場合を考察していることを連絡してきた ([3]の下書き))

例 6 天然ガスの拡散, 太陽の紅炎の持続

(Ames [2]) $\partial u/\partial t=\Delta\beta(u)$

Ω　例 2 と同じ

$X=L^1(\Omega)$

$\Delta_1=\Delta$ with $D(\Delta_1)=\{u\in W_0^{1,1}(\Omega)\,;\,\Delta u\in L^1(\Omega)\}$ 3)

β　R^1 上の単調増加連続函数で

$\lim_{|r|\to\infty}|\beta(r)/r|>0$　且　$\beta(0)=0$

---

3) Δ_1 が半群の生成作用素となることは Brezis-Strauss [3] の「例」にみられる (もっと一般の二階楕円型作用素について考察している)。

命題（Konishi [9], Crandall [4]）

$D(A)=\{u\in L^1(\Omega)\ ;\ \beta(u)\in D(\Delta_1)\}$

$Au=\Delta\beta(u)$

$\Longrightarrow$ (i), (ii), (iii), (iv)

（Crandall氏の結果と筆者の結果はoverlapする点が多い）

例7　一階非線型方程式　$\partial u/\partial t=\partial\beta(u)/\partial x$ [4)]

$X=L^1(0,\infty)$

β R^1上の単調増加函数で$\beta(0)=0$

命題[5)]

$D(A)=\{u\in L^1(0,\infty)\ ;\ \beta(u)\in L^1_{loc}(0,\infty),\ \frac{d\beta(u)}{dx}\in L^1(0,\infty)\}$

$Au=\frac{d\beta(u)}{dx}$

$\Longrightarrow$ (i), (ii), (iii), (iv)

---

4) 最近Crandall氏が筆者に送ってきた下書きによると例7を含むもっと一般な形が取り扱えることがわかる：
"A semigroup, a generator and an elliptic equation associated with first order quasilinear equations in several variables"

5) 渡辺二郎氏の忠告により改善された形で述べる。

—References—

[1] 相沢貞一：一階偏微分方程式のglobal solution．数学，21，11-23(1969)．

[2] W. F. Ames : Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. Academic Press, New York-London (1965).

[3] H. Brezis and W. Strauss (to appear). {H. Brezisから送られたその一部だけ参照.}

[4] M. G. Crandall : Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, New York-London, 1971, 157-179.

[5] M. G. Crandall and T. M. Liggett : Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math. 93 (1971), 265-298.

[6] G. E. Forsythe and W. R. Wasow : Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations. Wiley, New York-London (1960).

[7] 高村幸男：Crandall-Liggettの結果と残された問題．本講究録，134，1-5(1972)．

[8] Y. Konishi : Nonlinear semi-groups in Banach lattices. Proc. Japan Acad., 47, 24-28 (1971).

[9] Y. Konishi : Some examples of nonlinear semi-groups

in Banach lattices. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 18, 527-533 (1972).

[10] ——: On the uniform convergence of a finite difference scheme for a nonlinear heat equation. Proc. Japan Acad., 48, (1972) (to appear).

[11] ——: Une remarque sur perturbation d'opérateurs m-accrétifs dans espace de Banach II. Proc. Japan Acad., 48 (à paraître).

[12] ——: Une méthode de résolution d'une équation d'évolution non linéaire dégénérée. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA (à paraître).

[13] С.Н. Кружков : Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка. ДАН, 187, 29-32 (1969).

[14] H. Kunita : Sub-Markov semi-groups in Banach lattices. Proc. Int. Conference on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo), 332-343 (1969).

[15] K. Masuda : On the integration of diffusion equations in some function spaces, I (to appear).

[16] A. Pazy : On the differentiability and compactness of semi-groupes of linear operators. J. Math. Mech., 17, 1131-1141 (1968).

[17] K. Sato and T. Ueno : Multidimentional diffusion and the Markov process on the boundary. J. Math. Kyoto Univ., 4, 529-605 (1964).

[18] K. Sato : On dispersive operators in Banach lattices. Pacific J. Math., 33, 429-443 (1970).

[19] 〃 : Positive pseudo-resolvents in Banach lattices. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 17, 305-313 (1970).

[20] 〃 : A note on nonlinear dispersive operators. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA., 18, 465-473 (1972).

[21] W. A. Strauss : Evolution equations nonlinear in the time derivative. J. Math. Mech., 15, 49-82 (1966).

[22] 〃 : The energy method in nonlinear partial differential equations, 1967 Lecture Notes, IMPA, Notas de Matemática, Rio de Janeiro.

[23] G. F. Webb : Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces (preprint).

[24] 池田・渡辺 : 拡散過程の局所構造. Seminar on Probability vol. 35 (1971).