数理解析研究所講究録
第 164 巻 1972 年 38-55

壁面が周期的な運動をする場合のナビエ・ストークス方程式について

明治大学・工　森本浩子

はじめに

境界壁が動いている場合のナビエ・ストークス方程式は、藤田氏及びSauer氏によって研究され、Hopfクラスの弱解の存在が示されている。（Fujita-Sauer [3], [4], Fujita [2]）この小文では、境界壁が周期的な運動をしている時、同じ周期を持つHopfクラスの弱解が存在することを示す。与えられる境界条件及び外力は、もちろん壁の運動と同じ周期を持つものとする。証明の詳細についてはMorimoto [9]を見られたい。

境界が固定されている場合の周期的弱解の存在は、2次元の場合Prodi [10], Lions [7]によって示された。n次元の場合は、例えばLions [8] Chap 4を参照されたい。我々の場合も、彼らの方法を適用することが出来るが、境界条件が恒等的に0でないので、若干の工夫を要する。

§1. 壁の運動について

流体で充されている器 $\Omega(t)$ は R^m ($m=2, 3$) の有界領域で、時間 t とともに、周期 T (>0) で動いているとする。$\Omega(t)$ の境界を $\Gamma(t)$, $\hat{\Omega}_\infty = \bigcup_{-\infty<t<\infty} t\times\Omega(t)$, $\hat{\Gamma}_\infty = \bigcup_{-\infty<t<\infty} t\times\Gamma(t)$ とおく。各 t に於て、$\Gamma(t)$ は滑らかな $m-1$ 次元超平面であるのみならず、$\hat{\Gamma}_\infty$ も、後に述べるように滑らかとする。$\Omega(t)$ には島があってもよいが、その数は常に一定で、消えたり、新たに現われたりはしないものとする。すなわち

<u>仮定 1.1</u>

(i) $\Omega(t+T)=\Omega(t)$, $\Gamma(t+T)=\Gamma(t)$ がすべての $t\in R^1$ に対して成立つ

(ii) $\Gamma(t)$ は j 個の *simple closed surfaces* から成る。j は t によらず一定である。

(iii) m 次元空間における距離 $dis(\Gamma_\alpha(t), \Gamma_{\alpha'}(t))$ $(\alpha\neq\alpha')$ はある正定数 δ_0 より常に大きい。

(iv) $\hat{\Gamma}_\alpha = \bigcup_{0\leq t\leq T} t\times\Gamma_\alpha(t)$ とする。R^{m+1} の開集合 $\mathcal{U}_i$ ($i=1, 2, \cdots, k$) が存在して、$\hat{\Gamma}_\alpha$ は $\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{U}_i$ で覆われ、各 $\hat{\Gamma}_\alpha\cap\mathcal{U}_i$ は、C^3 級関数 f によって $f(x_1,\cdots,x_m, t)=0$ とあらわされる。しかも $\frac{\partial f}{\partial x_l}$ ($l=1,\cdots, m$) は $\hat{\Gamma}_\alpha\cap\mathcal{U}_i$ 上で同時に 0 になることはない。

§2. 問題の記述と結果

次の方程式を考えよう

$$(2.1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla p - (u\cdot\nabla)u + f_0 \qquad \text{in } \hat{\Omega}_\infty$$

$$(2.2)\quad \mathrm{div}\, u = 0 \qquad \text{in } \hat{\Omega}_\infty$$

$$(2.3)\quad u = \beta \qquad \text{on } \hat{\Gamma}_\infty$$

ここで $u = u(t, x)$ は流速をあらわすベクトル、$p = p(t, x)$ は圧力、$f_0 = f_0(t, x)$ は外力、$\beta = \beta(t, \xi)$ は境界での速度とする。与えられた f_0 及び β が、t に関し周期 T を持つとき（この時 f_0, β は T-periodic と呼ぶ）、方程式 (2.1) (2.2) (2.3) をみたす u, p を求める問題を（$P_n.\pi$）と呼ぶ。

いくつかの関数空間を準備しよう。Ω は R^m の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。

$$L_2(\Omega) = \{ f = (f_1, f_2, f_3) \,;\, \int_\Omega |f_j(x)|^2 dx < +\infty \}$$

内積を

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = (f, g)_\Omega = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega f_j(x) g_j(x) dx$$

と定義すれば、$L_2(\Omega)$ は Hilbert 空間である。内積から決るノルムを $\| f \|_{L_2(\Omega)} = \| f \|_\Omega$ などと書く。Sobolev 空間

$$W_2^1(\Omega) = \{ f = (f_1, f_2, f_3) \in L_2(\Omega) \,;\, \frac{\partial}{\partial x_j} f \in L_2(\Omega),\ j = 1, 2, 3 \}$$

も上と同様に内積、ノルムを定義する。

$$\mathcal{D}_\sigma(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \,;\, \mathrm{div}\, \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \}$$

$H_\sigma(\Omega) = D_\sigma(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ に於る完備化

$H_\sigma^1(\Omega) = D_\sigma(\Omega)$ の $W_2^1(\Omega)$ に於る完備化。

注意 2.1

$H_\sigma(\Omega)$ の元 φ が適当になめらかであれば、$\partial\Omega$ に於て、φ の法線成分は 0 となるが、φ は必ずしも 0 ではない。

次に周期関数の空間を導入しよう。$\hat{\Omega}_\infty$, $\hat{\Gamma}_\infty$ は既に定義した。$\hat{\Omega}$, $\hat{\Gamma}$ は各々 $\hat{\Omega}_\infty$, $\hat{\Gamma}_\infty$ の一周期分、すなわち

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{0\le t\le T} t\times\Omega(t), \quad \hat{\Gamma} = \bigcup_{0\le t\le T} t\times\Gamma(t)$$

とする。

$$\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty;\pi) = \{\varphi\in C^\infty(\hat{\Omega}_\infty);\ \mathrm{div}\,\varphi = 0 \text{ in } \hat{\Omega}_\infty,$$
$$\hat{\Gamma}_\infty \text{ の近傍で } \varphi\equiv 0,\ \varphi(t+T) = \varphi(t)\}$$

$\hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty;\pi) = \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty;\pi)$ の $L_2(\hat{\Omega})$ ノルムによる完備化

$\hat{H}_\sigma^1(\hat{\Omega}_\infty;\pi) = \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty;\pi)$ のノルム

$$\nu(\varphi) \equiv \|\nabla\varphi\|_{\hat{\Omega}} = \left(\int_{\hat{\Omega}} |\nabla\varphi|^2 dx\,dt\right)^{1/2}$$

による完備化

仮定 2.2

i) $f_0 \in \hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty : \pi)$

ii) β は $\hat{\Gamma}_\infty$ の近傍で定義された滑らかで T periodic な関数 $c = c(t,x)$ によって $b(t,x) = \mathrm{rot}\, c(t,x)$ とかける b の

$\hat{\Gamma}_\infty$ への制限になっている。

注意 2.3

$b|_{\hat{\Gamma}_\infty} = \beta$, $\operatorname{div} b = 0$ となるベクトル b の存在は、

$$\int_{\Gamma(t)} (\beta \cdot n)\, dS = 0 \qquad (n: \text{外向法線})$$

のとき、保証される。(Ladyzhenskaya [6]) 特に

$$\int_{\Gamma_\alpha(t)} (\beta \cdot n)\, dS = 0 \qquad \alpha = 1, \cdots, j$$

が成立つときは、適当なベクトル c が存在して、

$$b = \operatorname{rot} c$$

と表わされる。ベクトル b のなめらかさは β 及び Γ のなめらかさから決る。このような b が1つ求まれば、適当なスカラー関数 $h(t, x)$ をとって、$b^* = \operatorname{rot}(hc)$ とおけば、b^* が再び仮定 2.2 ii) をみたすように出来る。(補題 3.2 参照)

定義 2.4

u が (P_1, π) の弱解であるとは

i) 仮定 2.2 をみたすある b に対して、$u - b \in \hat{H}_\sigma^1(\hat{\Omega}_\infty : \pi)$

かつ $\quad \operatorname{ess.sup} \|u(t) - b(t)\|_{\Omega(t)} < +\infty$

ii) $\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty : \pi)$ の任意の元 φ に対して、

$$F(u, \varphi) \equiv \int_0^T \{(u, \varphi_t)_{\Omega(t)} + (u, \Delta\varphi)_{\Omega(t)} + (u, (u \cdot \nabla)\varphi)_{\Omega(t)}\} dt$$
$$= -\int_0^T (f_0, \varphi)_{\Omega(t)}\, dt$$

定理 2.5

仮定 1.1 及び仮定 2.2 のもとで (P_1, π) の弱解 u が存在す

る。uはすべての $t \in R^1$に対して定義され，$\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty;\pi)$の任意の元$\varphi$との内積　$(u(t),\varphi(t))_{\Omega(t)}$ は T-periodic な連続関数となる。

<u>注意 2.6</u>

$$(u(t),\varphi(t))_{\Omega(t)} = (u(0),\varphi(0))_{\Omega(0)} + $$
$$+\int_0^t\left\{(u(s),\varphi_s(s))_{\Omega(s)} + (u(s),\Delta\varphi(s))_{\Omega(s)} + (u(s),(u\cdot\nabla)\varphi(s))_{\Omega(s)}\right\}ds$$
$$+\int_0^t (f_0(s),\varphi(s))_{\Omega(s)}\,ds.$$
$$\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty;\pi)$$

が成立つ。さらに，次のエネルギー不等式が成立つ．

$$\|u(t)-b(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)-\nabla b(s)\|^2 ds \le C$$

但し Cは $\hat{\Omega}$ 及び f_0, b にのみよる定数である。

§3. 不等式

この節では，定理 2.5 の証明に必要となる不等式をいくつかあげよう。証明は省略する。

R^mの有界領域 Bは，なめらかな境界 ∂B を持ち，各 tに於て $\Omega(t)$ を含み，さらに $dis(\partial B,\Gamma(t)) \geqq \delta_0 > 0$ であるとする。$\hat{B}_\infty = R^1\times B$,　$\hat{B} = [0,T]\times B$ とおく。又，$\hat{E}_\infty = \hat{B}_\infty - \hat{\Omega}_\infty$, $\hat{E} = \hat{B} - \hat{\Omega}$ とおく。

ε, δ は十分小さい正数，$\varepsilon < \delta$ としよう。

$$\omega_i(t;\delta) = \{\, x \in \Omega(t)\ ;\ dis(x,\Gamma(t)) < \delta \,\}$$

$$\omega_e(t;\delta) = \{x \in B - \overline{\Omega(t)}\ ;\ \mathrm{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

$$\omega(t;\varepsilon,\delta) = \{x \in \Omega(t)\ ;\ \varepsilon < \mathrm{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

とする。又.

$$\hat{\omega}_i(\delta) = \bigcup_{0 \le t \le T} t \times \omega_i(t;\delta)$$

$$\hat{\omega}_e(\delta) = \bigcup_{0 \le t \le T} t \times \omega_e(t;\delta)$$

とする。

補題 3.1

仮定 1.1 のもとで、次の不等式が、すべての $\varphi \in H_\sigma^1(B)$ とすべての $t \in R^1$ について成立つ

i) $\|\varphi\|^2_{\omega(t;\delta)} \leq C\delta\{\|\varphi\|^2_{\Gamma(t)} + \|\varphi\|_{\omega(t;\delta)}\|\nabla\varphi\|_{\omega(t;\delta)}\}$

ii) $\delta\|\varphi\|^2_{\Gamma(t)} \leq C\{\|\varphi\|^2_{\omega(t;\delta)} + \delta\|\varphi\|_{\omega(t;\delta)}\|\nabla\varphi\|_{\omega(t;\delta)}\}$

iii) $\left\|\frac{\varphi}{\rho}\right\|^2_{\omega(t;\varepsilon,\delta)} \leq C\{\frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2_{\Gamma(t)} + \|\nabla\varphi\|^2_B\}$

ここで、C は φ, t, δ, ε によらない定数, $\rho = \rho(x)$ は x から $\Gamma(t)$ への距離, $\omega(t;\delta)$ は $\omega_i(t;\delta)$ あるいは $\omega_e(t;\delta)$ である。

補題 3.2

仮定 1.1 が成立っているとする。任意の正数 ε に対して、定数 C 及び仮定 2.2 をみたす関数 $b(t,x)$ が存在して、すべての $\varphi \in H_\sigma^1(B)$, $t \in R^1$ に対して次の不等式が成立つ

$$|((\varphi\cdot\nabla)\varphi,\ b)_B| \leq \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2_B + C(\chi(t,\cdot)\varphi,\ \varphi)_B$$

但し $\chi = \chi(t,x)$ は $\hat{E}_\infty$ の特性関数、即ち $\hat{E}_\infty$ 上で $\chi \equiv 1$,

$\hat{\Omega}_\infty$ 上で $\chi \equiv 0$ である。

注意 3.3

ナビエ・ストークス方程式の定常問題で、恒等的に 0 でない境界条件がついている場合、上に類似の不等式

$$|((\varphi\cdot\nabla)\varphi,\ b)_\Omega| \leq \varepsilon \|\nabla\varphi\|_\Omega \qquad \varphi \in H_\sigma^1(\Omega)$$

が用いられる。このような b を構成する技巧は Hopf [5] による。補題 3.2 の $b(t,x)$ は、Fujita [1] に従って構成されるが、その際、補題 3.1 の不等式が有用である。

§4. 処罰法

方程式 (2.1) ～ (2.3) は、境界 $\Gamma(t)$ が動いているので直接には考察しにくい。$\Omega(t)$ を、固定された領域へ写す変換を行って、方程式を変形して問題を考えることも出来るが、ここでは、処罰法と呼ばれる方法で、(2.1) を近似する(良い性質をもった)方程式をまず考える。処罰法については Lions [8] Chap. 3 参照のこと。

u^n, p^n は、補助領域 $\hat{B}_\infty$ で定義された関数とする。$\bar{f}_0$ は f_0 を $\hat{\Omega}_\infty$ の外では 0 とおいて、$\hat{B}_\infty$ へ拡張したもの、n は正整数とする。

$$(4.1) \quad \frac{\partial u^n}{\partial t} = \Delta u^n - \nabla p^n - (u^n\cdot\nabla)u^n - n\chi(u^n - b) + \bar{f}_0 \quad \text{in } \hat{B}_\infty$$

$$(4.2) \quad \operatorname{div} u^n = 0 \qquad\qquad \text{in } \hat{B}_\infty$$

(4.3) $u^n = 0$ on $R^1 \times \partial B$.

(4.1) ～ (4.3) をみたす T-periodic な u^n, p^n を求める問題を、$(AP)_n$ と呼ぶ。

注意 4.1

(4.1) は $\hat{\Omega}_\infty$ 上では (2.1) と一致する。

注意 4.2

$u - b = v$, $u^n - b = v^n$ とおけば、v, v^n は次の方程式をみたす。

(4.4) $$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \nabla p - (v\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)b - (b\cdot\nabla)v + f$$

(4.5) $$\frac{\partial v^n}{\partial t} = \Delta v^n - \nabla p^n - (v^n\cdot\nabla)v^n - n\chi v^n - (v^n\cdot\nabla)b - (b\cdot\nabla)v^n + \bar{f}$$

但し $f = f_0 + \Delta b - (b\cdot\nabla)b - b_t$, $\bar{f} = \bar{f}_0 + \Delta b - (b\cdot\nabla)b - b_t$.

$(AP)_n$ をガレルキンの方法に従って解く。$A = A(B)$ は、$H_\sigma(B)$ で定義されたストークス作用素、$\{\varphi_j\}$ は、その固有関数系、$\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ が張る m 次元ベクトル空間を Φ_m とする。

(4.5) を考慮して、次の常微分方程式をまず調べよう。

(4.6) $$\frac{d}{dt}(w_m(t), \varphi_j) + (\nabla w_m, \nabla\varphi_j) - ((w_m\cdot\nabla)\varphi_j, w_m) + n(\chi w_m, \varphi_j) - ((b\cdot\nabla)\varphi_j, w_m) + ((w_m\cdot\nabla)b, \varphi_j) = (\bar{f}, \varphi_j) \qquad j = 1, \cdots, m$$

(4.7) $$w_m(0) = w_{m0}$$

但し (,) は $L_2(B)$ での内積をあらわす。

補題3.2に於て，$\varepsilon=\frac{1}{4}$としたとき定まる整数$n_0 > C_{\frac{1}{4}}$，及び関数$b=b(t,x)$をとり，固定する。補題3.2及びポアンカレの不等式

$$\|\varphi\|_B^2 \leq \frac{1}{\lambda_0}\|\nabla\varphi\|_B^2 \qquad \varphi \in H_\sigma^1(B)$$

を用いて，

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt}\|w_m(t)\|^2 + \|\nabla w_m(t)\|^2 + 2(n-n_0)(\chi w_m(t), w_m(t)) \leq \frac{2}{\lambda_0}\|\tilde{f}(t)\|^2$$

及び

$$(4.9) \quad \|w_m(t)\|^2 \leq \left\{\|w_m(0)\|^2 + \frac{2}{\lambda_0}\int_0^t e^{\lambda_0\tau}\|\tilde{f}(\tau)\|^2 d\tau\right\} e^{-\lambda_0 t} \qquad \forall t \in [0,T]$$

が(4.8)をみたす$w_m(t)$に対して成立つ。従って，(4.6)(4.7)は任意の初期値$w_{m0} \in \Phi_m$に対し解$w_m(t)$を持つ。写像τ_mは，w_{m0}に対し$w_m(T)$を対応させるものとしよう。正の定数Rを

$$R^2 \geq \frac{2}{\lambda_0(e^{\lambda_0 T}-1)}\int_0^T e^{\lambda_0 t}\|\tilde{f}(t)\|^2 dt$$

ととれば，(4.9)より

$$\tau_m : \mathcal{B}_R = \{\varphi \in \Phi_m \,;\, \|\varphi\|_B \leq R\} \to \mathcal{B}_R$$

であるから，ブラウアーの不動点定理により，τ_mに不動点が存在することが言える。すなわち，次の命題が成立つ。

<u>命題4.3</u>

方程式(4.6)のT-periodicな解w_m^nが存在して，評価

$$\|w_m^n(t)\|_B^2 + \int_0^t \|\nabla w_m^n(s)\|_B^2 ds + 2(n-n_0)\int_0^t (\chi w_m^n(t), w_m^n(t))_B dt$$
$$\leq R^2 + \frac{2}{\lambda_0}\int_0^t \|f(s)\|_B^2 ds \qquad t \in [0,T]$$

が成立つ。

このようにして得られた $\{w_m^n\}_{m=1}^\infty$ の適当な部分列は、実は $(AP)_n$ の解に収束していることを次に示そう。$D(A)$ は $A = A(B)$ の定義域、即ち $D(A) = \{ u \in W_2^2(B) \cap H_0(B) ;\ u = 0 \text{ on } \partial B\}$ である。$D(A)$ はノルム $\|Au\|_B$ で Banach 空間になる。$D(A)$ の共役空間 $D(A)'$ に、ノルム

$$\|f\|_{D(A)'} = \sup_{u \in D(A)} \frac{|\langle f, u\rangle|}{\|u\|_{D(A)}}$$

をいれて、Banach 空間とみなす。

<u>命題 4.4</u>

$\left\{\frac{d}{dt} w_m^n(t)\right\}_{m=1}^\infty$ は $L_2(0, T : D(A)')$ の有界集合である。

（証明略）

ここで、後にも必要となるコンパクト性に関する補題を述べておく。X_0, X_1, X_2 は Hilbert 空間とし、作用素 $P : X_0 \to X_1$, $S : X_0 \to X_2$ は次の性質を持つとする。

i) P, S は完全連続、線形作用素である

ii) $Sv = 0 \Rightarrow Pv = 0 \qquad (v \in X_0)$

区間 (α, β) で定義され X_i に値をとる関数の作る Hilbert 空間 $L_2(\alpha, \beta : X_i)$ を考える。作用素 $\hat{P}$, $\hat{S}$ を次のように定義する。

$$(\hat{P} v)(t) \equiv P v(t)$$

$$(\hat{S} v)(t) \equiv S v(t) \qquad v(t) \in L^2(\alpha, \beta : X_0)$$

$\hat{P} : L_2(\alpha, \beta : X_0) \to L_2(\alpha, \beta : X_1)$, $\hat{S} : L_2(\alpha, \beta : X_0) \to L_2(\alpha, \beta : X_2)$

となる。

<u>補題4.5</u> (Fujita - Sauer [4])

$\hat{P}, \hat{S}$ は上に定義された作用素とする。$\{v_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ が $L_2(\alpha, \beta : X_0)$ の有界集合で、$\left\{\frac{d}{dt}\hat{S} v_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ が $L_2(\alpha, \beta : X_2)$ の有界集合であるならば、$\{\hat{P} v_n\}_{n=1}^{\infty}$ から部分列を選んで $L_2(\alpha, \beta : X_1)$で強収束するように出来る。

証明は Morimoto [9] を見られたい。

我々の $\{w_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ に立ちもどろう。命題4.3 , 4.4により $\{w_m^n\}$ は $X_0 = H_\sigma^1(B)$, $X_1 = H_\sigma(B)$, $X_2 = (D(A))'$, P, S は injection として補題4.5の仮定をみたす。故に、$\hat{H}_\sigma(\hat{B}_\infty : \pi)$ で強収束する部分列 $\{w_{m_j}^n(t)\}_{j=1}^{\infty}$ が選べる。その極限を v^n とすれば、$u^n = v^n + b$ について次が成立つ。

$$(4.10) \qquad u^n - b \in \hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty : \pi), \quad \operatorname*{ess.sup}_t \|u^n(t) - b(t)\| < +\infty$$

$$(4.11) \qquad \int_0^T \{(u^n, \varphi_t)_B + (u^n, \Delta\varphi)_B + (u^n, (u^n \cdot \nabla)\varphi)_B\} dt$$

$$= n \int_0^T (\chi(u^n - b), \varphi)_B \, dt - \int_0^T (\bar{f}_0, \varphi)_B \, dt$$

$$\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{B}_\infty : \pi)$$

$$(4.10) \qquad (u^n(t), \varphi(t))_B = (u^n(0), \varphi(0))_B + \int_0^t (u^n(s), \varphi_s(s))_B \, ds +$$

$$+ \int_0^t (u^n, \Delta\varphi)_B \, ds + \int_0^t (u^n, (u^n \cdot \nabla)\varphi)_B \, ds +$$

$$+\int_0^t (\bar{f}_0, \varphi)_B\, ds - n\int_0^t (\chi(u^n - b), \varphi)_B\, ds$$
$$\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{B}_\infty : \pi)$$

(4.13) $$\|v^n(t)\|_B^2 + \int_0^t \|\nabla v^n(t)\|_B^2\, dt + 2(n-n_0)\int_0^t (\chi v^n, v^n)_B\, dt \leq R^2 + \frac{2}{\lambda_0}\int_0^t \|\bar{f}(s)\|_B^2\, ds \qquad t \in [0, T]$$

但し $\bar{f} = \bar{f}_0 + \Delta b - (b\cdot\nabla)b - b_t$.

§5. 定理 2.5 の証明

前節で求めた $\{v^n\}$ は実は (P_1, π) の弱解に収束していることを示す。評価 (4.10) ～ (4.13) により次の収束が成立つ。すなわち，$\{v^n\}$ の部分列 $\{v^{n_j}\}$ が存在して $\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty : \pi)$ に対し $(v^{n_j}(t), \varphi(t))_{\Omega(t)} \longrightarrow (v^*(t), \varphi(t))_{\Omega(t)}$ 一様，

$v^{n_j} \rightarrow v^*$ $\quad \hat{H}^1_\sigma(\hat{B}_\infty : \pi)$ で弱収束，

v^* は $\operatorname{ess.sup} \|v^*(t)\|_B < +\infty$, $\|v^*\|_{\hat{E}} = 0$ をみたす。$v^* + b$ の $\hat{\Omega}_\infty$ への制限が定義 2.4 ii)式をみたすことを言えば定理は証明される。そのために，$\{v^n\}$ の任意の部分列が，$\hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty ; \pi)$ で強収束する部分列を含むことを言えばよい。Fujita-Sauer[4] に従って証明のあらすじを記す。

$X_0 = \{u \in W_2^1(\Omega)\ ;\ \operatorname{div} u = 0\}$, $X_1 = H_\sigma(\Omega)$, $X_2 = D(A(\Omega))'$ とし，$\mathbb{P} : X_0 \rightarrow X_1$, $S : X_0 \rightarrow X_2$ は次のように定義される。

$$\mathbb{P}u = P(\Omega)u \qquad u \in X_0$$

$$Su(\varphi) = \langle Su, \varphi\rangle = (u, \varphi)_B \qquad u \in X_0,\ \varphi \in D(A(\Omega)).$$

但し $P(\Omega)$ は $L_2(\Omega)$ から $H_\sigma(\Omega)$ への射影である。スカラー α, β 及び領域 Ω を，$(\alpha,\beta)\times\Omega \subset \hat{\Omega}_\infty$ となるようにとる。このとき，

<u>補題 5.1</u>

$\{\hat{P}v^n\}$ は $L_2(\alpha,\beta : X_1)$ のコンパクト集合，従って，

$\{P(\Omega)v^n\}$ は $L_2((\alpha,\beta)\times\Omega)$ のコンパクト集合である。

証明

(4.12) 及び (4.13) より $\{v^n\}$ は $L_2(\alpha,\beta : X_0)$ の有界集合，

$\{\frac{d}{dt}\hat{S}v^n\}$ は $L_2(\alpha,\beta : X_2)$ の有界集合であることが言える。

従って補題 4.5 より結論をうる。

<u>補題 5.2</u>

n に依らない定数 C が存在して

$$\|v^n\|_{\hat{P}} \leq C\, n^{-\frac{1}{4}}$$

証明

補題 3.1 ii) を $w = w_e$ に対して用いれば

$$\|v^n\|^2_{\hat{P}} \leq C\left\{\delta^{-1}\|v^n\|^2_{\hat{E}} + \|v^n\|_{\hat{E}}\|\nabla v^n\|_{\hat{B}}\right\}$$

(4.13) より

$$\|v^n\|_{\hat{E}} \leq \left\{\frac{C_1}{2(n-n_0)}\right\}^{1/2}$$

$$\|\nabla v^n\|_{\hat{B}} \leq C_1^{1/2}$$

但し $C_1 = R^2 + \frac{2}{\lambda_0}\int_0^T \|f(s)\|^2_{\hat{B}}\, ds$。従って求める不等式が十分大きい n に対して成立つ。

次の2つの補題はv^nの収束を示すのに役立つ。証明は、Fujita-Sauer [4] を見られたい。

<u>補題 5.3</u>

$G=(\alpha,\beta)\times\Omega\subset\hat{\Omega}_\infty$ とする。この時、Gによらない定数Cが存在して、不等式

$$\int_\alpha^\beta \| w(t)-P(\Omega)w(t)\|_\Omega^2\,dt \leq C\int_\alpha^\beta \| w(t)\|_{\partial\Omega}^2\,dt$$

がすべての $w\in\hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty;\pi)$ に対し成立つ。

<u>補題 5.4</u>

$G=(\alpha,\beta)\times\Omega\subset\hat{\Omega}_\infty$, $(\alpha,\beta)\times\partial\Omega\subset\hat{\omega}_i(\delta)$ とする。この時、Gとδに依らない定数Cが存在して、不等式

$$\int_\alpha^\beta \| w(t)\|_{\partial\Omega}^2\,dt \leq C\left\{\int_\alpha^\beta \| w(t)\|_{\Gamma(t)}^2\,dt+\delta\int_\alpha^\beta \|\nabla w(t)\|_B^2\,dt\right\}$$

がすべての $w\in\hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty;\pi)$ に対し成立つ。

これで定理の証明の準備は整った。$\hat{\Omega}$を次のように"細分"する。$\{t_j\}$は$[0,T]$の可算ヶの稠密な集合とする。

$$G_{j,k,l}=(t_j,t_k)\times\Omega^l(t_j)$$

$$\Omega^l(t_j)=\Omega(t_j)-\overline{\omega_i}(t_j;\tfrac{1}{l})$$

$$=\{x\in\Omega(t_j);\ \mathrm{dis}(x,\Gamma(t_j))>\tfrac{1}{l}\}$$

$\hat{\Omega}$の空でない開集合$G_{j,k,l}$の全体を$\mathcal{G}$とおく。補題5.1より、必要ならばさらに部分列$\{v^{n'}\}$を選んで、すべての$G\in\mathcal{G}$に対して$\{P(\Omega)v^{n'}\}$が$L_2(G)$で強収束するように出来る。このようにして選んだ部分列は実は$L_2(\hat{\Omega})$で強収

束していることを以下で示そう。任意の正数 ε が与えられた時，(4.13) を考慮すれば

$$\delta \|\nabla v^n\|^2_{\hat{B}} < \varepsilon \qquad n=1,2,\cdots$$

が成立つような $\delta>0$ が存在する。この時、有限ケの $\mathcal{G}$ の元 $G_1, G_2, \cdots, G_{N(\delta)}$ を選んで

i) $\hat{\Omega} - \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} G_j \subset \hat{\omega}_i(\delta)$

ii) $\forall x \in \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} G_j$ は高々 2 ケの G_j にしか属さない

と出来る。各 G_j は $(\alpha_j, \beta_j)\times\Omega_j$ と表わされているとする。$w = v^{n'} - v^{m'}$ とおく。

$$\|w\|^2_{\hat{\Omega}} \leq \sum_{j=1}^{N(\delta)} \|P(\Omega_j)w\|^2_{G_j} + \sum_{j=1}^{N(\delta)} \|w - P(\Omega_j)w\|^2_{G_j} + \|w\|^2_{\hat{\omega}(\delta)}$$

に於て，右辺第一項は $n', m' \to \infty$ のとき 0 に収束する。第二項は補題 5.3，5.4 及び G_j のかさなり具合により，

$$C\{\|w\|^2_{\hat{\Gamma}} + \delta\|\nabla w\|^2_{\hat{B}}\}$$

で上から評価される。これはさらに、補題 5.2 と δ の選び方により $C\left(\frac{1}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{\sqrt{m'}} + 2\varepsilon\right)$ でおさえられる。第三項は補題 3.1 の不等式 i) を用いて

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{\hat{\omega}(\delta)} &\leq C\left(\delta\|w\|^2_{\hat{\Gamma}} + \delta^2\|\nabla w\|^2_{\hat{B}}\right)\\ &\leq C\delta\left(\frac{1}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{\sqrt{m'}} + 2\varepsilon\right)\end{aligned}$$

従って $\lim_{m', n'\to\infty} \|w\|^2_{\hat{\Omega}} \leq C\cdot\varepsilon$

故に $\{v^{n'}\}$ は $L_2(\hat{\Omega})$ で強収束する。よって定理は証明された。

引用文献

[1] H. Fujita : On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I 9 (1961), 59-102

[2] H. Fujita : 壁面が動くときのナビエ-ストークス方程式について. 数理科学講究録 106

[3] H. Fujita and N. Sauer : Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equations in a non-cylindrical domain, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1965), 465-468

[4] H. Fujita and N. Sauer : On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 17 (1970), 403-420.

[5] E. Hopf : On nonlinear partial differential equation, Lecture series of symposium on partial differential equations, Univ. of Kansas (1957), 1-32

[6] O. A. Ladyzhenskaya : The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.

[7] J. L. Lions : Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes,

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 30 (1960), 16-23

[8] J. L. Lions; Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[9] H. Morimoto: On existence of periodic weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I.

[10] G. Prodi: Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 30 (1960), 1-15.