数理解析研究所講究録
第164巻 1972年 120-122

非線型熱方程式に関して
— Abstract —

東大 理 小西芳雄

§. 次の形の非線型熱方程式は工学に於いて重要であるばかりでなく 物理学の研究対象となる様々な現象を記述している為にその数学的取扱いは必要である:[1)]

(1) $c\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{div}\,(K\,\mathrm{grad}\,v)$,

ここに $c=c(v)$: 比熱, $\rho=\rho(v)$: 密度 且 $K=K(v)$: 熱伝導率 であり, 夫々 温度 v に依存している。

我々は特に 滑らかな縁を持った有界な容器 $\Omega \subset R^d$ で 次の境界条件と初期条件のもとに(1)を考える:

(2) $v = 0$ on $\partial\Omega\times(0,\infty)$

(3) $v(0) = a$ in Ω .

---

1) Ames: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. の P.4〜P.8 や Forsythe-Wasow の p.143 を見よ。

もしCとρがともにvによらず，Kだけがvによる時は，直接attack出来るが[2]，一般の場合は次のStrauss[3]によるreductionを行なわなければならない（少なくとも筆者にとって）：

$$K' = K \ , \ \varphi' \circ K = c\rho / K \ , \ \partial u/\partial t = K \circ v$$

$$\varphi \circ K \circ a = \Delta b$$

なる形式的置きかえを行ない　問題(1),(2),(3)を

$$(1)' \quad \varphi(\partial u/\partial t) = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$$(2)' \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

$$(3)' \quad u(0) = b \quad \text{in } \Omega$$

として考える。(1)′は$\varphi^{-1} = \beta$と置くことにより

$$(1)'' \quad \partial u/\partial t = \beta(\Delta u) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

ともかける。さらに，$\mathbb{C}_0(\bar\Omega) = \{ f \ ;\ \bar\Omega$上の連続函数，$f = 0$ on $\partial\Omega \}$，$\|f\|_{\mathbb{C}_0(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |f(x)|$，なるBanach空間とし，$\Delta_0$を$\{ f \in \mathbb{C}_0(\bar\Omega)\ ;\ f \in W^{2,q}(\Omega)$ $(q > d)$ 且 $\Delta f \in \mathbb{C}_0(\bar\Omega) \}$[4]なる定義域をもつ$\Delta$とすれば (1)″,(2)′

2) Konishi : Some examples of nonlinear semi-groups in Banach lattices (to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo).

3) Strauss : Evolution equations non-linear in the time derivative. J. Math. Mech. 15, 49-82 (1966).

4) Masuda : 東京大学に於ける講義（1971年10月～72年2月）.

は 次の $\mathbb{C}_0(\Omega)$ に於ける常微分方程式の形にかける:

(4) $du/dt = \bar{\beta}\circ\Delta_0 u \qquad t\in(0,\infty)$,

但し $\bar{\beta}$ は β より定義される $\mathbb{C}_0(\Omega)$ の作用素である。我々の第一の結果は, Crandall-Liggett[5] の意味で $\bar{\beta}\circ\Delta_0$ は $\mathbb{C}_0(\Omega)$ の半群を生成するということである:

$$\exp(t\bar{\beta}\circ\Delta_0)\cdot b = s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}(I-\lambda\bar{\beta}\circ\Delta_0)^{-[t\lambda]}b \quad .$$

第二の結果は, ある種の implicit な差分スキームの解が上で得られた非線型半群解に収束するということであり, これは線型の場合に周知の結果の拡張である。

以上詳細は筆者の次の論文を参照されたい。

"On the uniform convergence of a finite difference scheme for a nonlinear heat equation" (to appear in Proc. Japan Acad.).

5) Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces. Amer. J. Math., 93, 265-298 (1971).