数理解析研究所講究録
第164巻 1972年 174-186

混合型偏微分方程式の差分解法について

京大 工 細野 雄三

§1. 序

混合型偏微分方程式は、数理物理学の種々の場面に現れる。特に、遷音速流体の流れを記述する方程式はマッハ数M≷1により微分方程式の係数の符号が変化し、方程式の型は、それぞれ双曲型，楕円型と変化する。この分野での最初の重要な仕事は、F. Tricomi (1920) によってなされた。

遷音速流体の流れを記述する基礎方程式をホドグラフ法により表わすと

$$(1\text{-}1) \qquad y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{Tricomi の方程式})$$

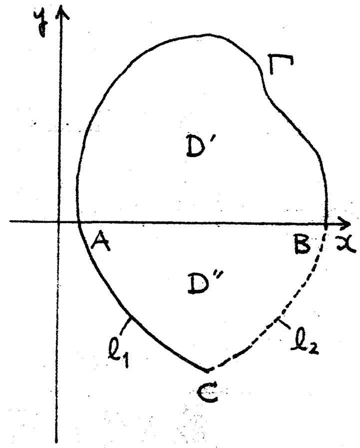
となる。以下では、上式もしくはより簡単化された

$$(1\text{-}2) \qquad (\operatorname{sgn} y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{Lavrentef-Bitsadze の方程式})$$

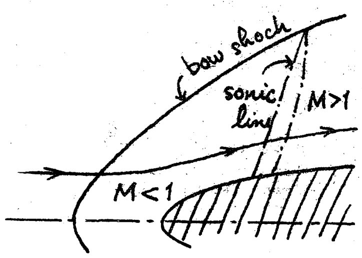
について、基本的な境界値問題（Tricomi 問題）に対する差分

解法に関して、これまでに得られている結果を概観する。

§2. Tricomi 問題



Hodograph Plane fig.1



Physical Plane fig.2

図2のような流れを決定する問題は、Tricomi 問題として数学的に次のように提出された。考える領域は、なめらかな曲線Γと方程式(1)((1-1) or (1-2))の特性曲線 l_1, l_2 で囲まれる領域Dである。(fig 1) 簡単のため $A=(0,0)$, $B=(1,0)$ とする。方程式(1)が楕円型である領域を D', 双曲型である領域を D'', 係数が0となる領域をLとする。(1-1)に対する特性曲線の方程式は

(2) $$\frac{4}{9}y^3+(x-c)^2=0$$

となる。

Tricomi 問題「方程式(1-1) (or (1-2)) の解を、境界条件

(3) $$u=\varphi \text{ on } \Gamma, \quad u=\psi \text{ on } l_1 \quad 但し\ \varphi(A)=\psi(A)$$

の下で、求めること」

この問題をFredholm型の積分方程式に帰着することにより次のような解の存在と一意性が証明されている。(F. Tricomi)

i) $u(x,y)$ は $\bar{D}$ で連続

ii) $u(x,y)$ の1階導函数は点A，Bを除いた$\bar{D}$で連続
点A，Bではオーダーα（$0<\alpha<1$）で無限大になってもよい。

iii) $u(x,y)$ の2階導函数は線分ABを除いたDで連続
AB上では2階導函数は存在しなくてもよい

iv) $u(x,y)$ は $D\setminus AB$ 上で方程式 (1-1)をみたす

§3．Tricomi 問題に対する差分解法

1．最大値原理を基礎とする方法

Ladyzenskaya[1)] は、問題 (1-2) (3) に対して以下のような差分解法を与えた。(1-2)の特性曲線は $x\pm y=\text{const.}$ であり、$x+y=\xi$, $x-y=\eta$ と変数変換すると $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{y=0,\,x\in[0,1]}=\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\equiv\chi(x)$ となり次の問題に帰着できる。

$$(4)\qquad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{in } D'$$

$$(5)\qquad u=\varphi \qquad \text{on } \Gamma$$

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\chi(x) \qquad \text{on } L$$

格子幅 h ($nh=1$) で D' を直線 $x_k=kh$; $k=0,\pm1,\cdots$ と $y_i=ih$; $i=0,1,\cdots$ で正方形に分割し、D' に含まれる格子点の集合を $\bar{D}'_h$ で表わし、4つの隣接格子点がすべて $\bar{D}'_h$ に含まれている点を D'_h、$L_h=\{(\frac{m}{n},0)\mid(\frac{m}{n},0)\in\bar{D}'_h,\ (\frac{m-1}{n},\frac{1}{n})\in\bar{D}'_h\}$、$\Gamma_h=\bar{D}'_h\setminus(D'_h\cup L_h)$ とする。suffix h で格子点函数であること

を，x で前進差分，$\bar{x}$ で後退差分を表わすとする。そのとき

(4)(5)(6) を次の scheme で近以する。

$$(4') \qquad \Delta_h u_h \equiv u_{h x\bar{x}} + u_{h y\bar{y}} = 0 \qquad \text{on } D_h'$$

$$(5') \qquad u_h = \varphi \qquad \text{on } \Gamma_h$$

$$(6') \qquad l_h u_h \equiv \frac{1}{h\sqrt{2}}\left\{ u_h\left(\frac{m-1}{n}, \frac{1}{n}\right) - u_h\left(\frac{m}{n}, 0\right)\right\} = \chi\left(\frac{m}{n}\right) \text{ on } L_h$$

(4')(5')(6') の解の存在および一意性，収束性の証明において次の補助定理が本質的である。

<u>補助定理</u>　「w_1，w_2，v が $\bar{D}_h'$ 上で与えられ

$$(7) \qquad \Delta_h w_2 < \Delta_h v < \Delta_h w_1$$

$$(8) \qquad l_h w_2 < l_h v < l_h w_1$$

をみたすならば、次の評価が成り立つ

$$(9) \qquad w_1 + \min_{\Gamma_h}(v - w_1) \leq v \leq w_2 + \max_{\Gamma_h}(v - w_2)$$ 」

可解性は補助定理において、$w_1 = \varepsilon\left\{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2\right\}$ $({}^{\forall}\varepsilon > 0)$ $w_2 = -w_1$ とおくことによって得られる。収束性についても、$w = (y - x + a)^2$ を考え、a を $w|_\Gamma \geq 1$, $\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_L \geq 1$ となるようにとり、$w_1 = c_1 h w$, $w_2 = -c_2 h w$ とおき、c_1，c_2 を適当にとると、ある h_0 が存在してすべての $h \leq h_0$ に対して、w_1，w_2 は補助定理の条件をみたし、結局次の定理が得られる。

<u>定理</u>「問題 (4)(5)(6) の解 $u(x,y)$ が $\bar{D}$ で3次までの有界な導函数をもち、Γ をこめて1階の連続な導函数を、AB をこめて2階の連続な導函数をもつとする。そのとき

誤差 $v_h = u - u_h$ に対して次の評価が成り立つ

$$|v_h| = |u - u_h| \leq Ch \qquad C;\ \text{positive const.}$$ 」

注意1、点Aで厳密解がP3.ii) のような性質を持つ場合に、差分解法を与え、収束性の議論をE.A.Волков[2] が行っている。

注意2. 上で述べた議論はTricomiの方程式についても成立する。Тагиев[3]

注意3. 楕円型領域に関する問題に帰着するのではなく、全領域で差分する方法が Халилов[4], Филиппов[5], Ogawa[6], Kovalenko[7,8], により研究されている。その時双曲型領域での次の最大値原理が基礎になる。「特性曲線 l_1 上で0になるTricomi問題の解は、L上では、正の最大値，負の最小値をとらない。」

2. Friedrichs による Symmetric Positive System に帰着する方法

考える領域をDとし、その境界を ∂D，境界条件の指定される部分を $\mathcal{B}_0$ とする（Tricomi問題の場合 $\mathcal{B}_0 = \Gamma \cup l_1$）。境界条件(3)を

(10) $$u = \varphi_0 \qquad \text{on } \mathcal{B}_0$$

と書く。$\mathcal{B}_0$ 上で φ_0 となるD上の函数 φ の存在を仮定する。

$u' = u - \varphi$ とおき、$v_1 = u_x'$, $v_2 = u_y'$, $v = {}^t(v_1, v_2)$ を導入すると、Tricomi 問題は次の型に帰着できる。

$$(11) \qquad Lv = \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} = f \quad \text{in } D$$

$$(12) \qquad n_y v_1 - n_x v_2 = 0 \quad \text{on } B_0$$

ここで、$f = {}^t\left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\ 0 \right)$, $n = (n_x, n_y)$ は B_0 の outward normal である。Friedrichs[9] は上の問題を含む次のような一般的な問題を設定し解の存在と一意性を証明した。

微分作用素 $K = 2\sum_{\lambda=1}^{m} \alpha^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \gamma$ が

1) matrix $\alpha^1, \cdots, \alpha^m$; symmetric

2) $\kappa = \gamma - \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \alpha^\lambda}{\partial x^\lambda}$ とおいたとき、$\kappa + \kappa' > 0$

をみたすとき、K を <u>symmetric positive operator</u> という。

∂D の outward normal を $n = (n_1, \cdots, n_m)$ とし行列 $\beta = n \cdot \alpha = \sum_{\lambda=1}^{m} n_\lambda \alpha^\lambda$ を考える。β に対してある行列 μ が存在して、境界条件を $Mu = (\mu - \beta) u = 0$ と書くことができ、$\mu + \mu' \geq 0$ のとき境界条件 $Mu = 0$ は operator K に対して <u>semi-admissible</u> と呼ばれる。

行列 β が $\beta = \beta_+ + \beta_-$ の2つに分割できて、$\mu = \beta_+ - \beta_-$ とおいたとき

3) $\mu + \mu' \geq 0$

4) $\mathcal{N}(\beta_+) \oplus \mathcal{N}(\beta_-) = \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$; u の全空間, $\mathcal{N}(\beta_\pm)$; null sp. of $\beta_\pm$)

5) $\mathcal{R}(\beta_+) \cap \mathcal{R}(\beta_-) = \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$; sp. $u=0$, $\mathcal{R}(\beta_\pm)$; range of $\beta_\pm$)

をみたすならば、$\beta_\pm$はadmissibleといわれ、境界条件$Mu=-2\beta_- u = 0$は<u>admissble boundary condition</u>と呼ばれる。

Friedrichsはsemi-admissible boundary conditionの下で

(13) $\qquad \|u\|_{L^2(D)} \leq C_1 \|Ku\|_{L^2(D)} \qquad 1/C_1$; $K+K'$の最小固有値

なる不等式が成り立つことを示し、解の一意性と、弱解の存在を示した。彼はさらに、admissible boundary conditionの下で$W_2^1(D)$に属する解の存在を証明した。

その際、(11)はそのままでは条件2)がみたされないため行列$B = \begin{pmatrix} b & -cy \\ c & b \end{pmatrix}$を(11)に左からかけて

(11′) $\qquad \begin{pmatrix} -by & -cy \\ -cy & b \end{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} - \begin{pmatrix} -cy & b \\ b & c \end{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y} = f'$

とし、(11′)のKに対して条件2)が成立するように$b(x,y)$, $c(x,y)$を選んでsymmetric positiveの枠にとりこんだ。一方、境界条件に関しては、βがnとαに関係し従って(12)がadmissible b.c.であるためには境界に制限を加えなければならないがここでは述べない。

T. Katsanis[10)11)]は上に述べた問題

(14) $\qquad Ku = f \qquad$ on D

(15) $\qquad Mu = 0 \qquad$ on ∂D

を差分化し、本質的に$O(h^{\frac{1}{2}})$の誤差評価をもつ差分schemeを

与えた。

Kは次の形に書ける

$$Ku = 2\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\alpha^\lambda u) - \sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial \alpha^\lambda}{\partial x^\lambda}u + \kappa u$$

これを任意の領域P（⊂D）で積分すると

$$(16)\quad \int_P Ku = 2\int_{\partial P}\beta u - \int_P \sum \frac{\partial \alpha^\lambda}{\partial x^\lambda}u + \int_P \kappa u = \int_P f$$

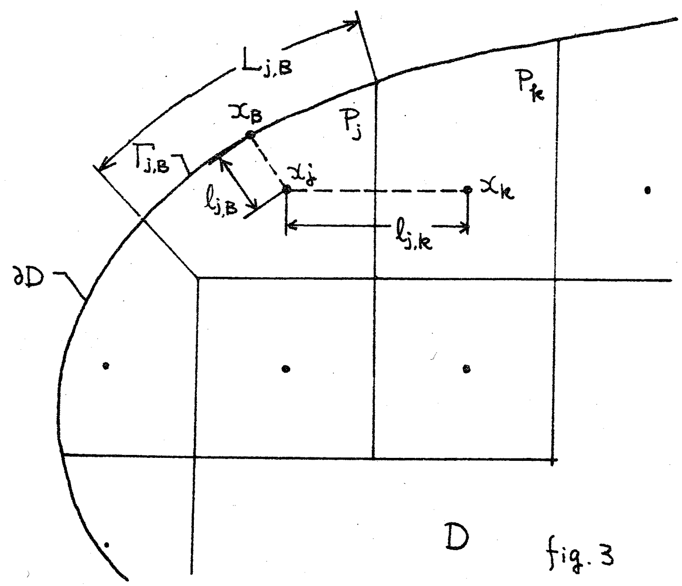


fig. 3

HをDに含まれるN個の格子点の集合とし格子領域P_jを

$P_j = \{x \mid |x - x_j| < |x - x_k|, \forall x_k \in H, k \neq j ; x \in D\}$

で定義し、

$l_{j,k} = |x_j - x_k|$（x_jとx_kは隣接する格子点），$h = \max l_{j,k}$，A_jをP_jの体積，$\Gamma_{j,k} = \overline{P_j} \cap \overline{P_k}$，$L_{j,k}$を$\Gamma_{j,k}$の面積とし、suffix Bは境界上の点であることを示し．x_Bは$\Gamma_{j,B}$の中心にとる。

$$\int_{\Gamma_{j,k}}\beta u \doteqdot L_{j,k}\beta_{j,k}\frac{u_j+u_k}{2}\quad(\beta_{j,k} = -\beta_{k,j}),\ \int_{P_j}\sum\frac{\partial\alpha^\lambda}{\partial x^\lambda}u \doteqdot \int_{\partial P_j}\beta u_j$$

$$\int_{\Gamma_{j,k}}\beta u_j \doteqdot L_{j,k}\beta_{j,k}u_j,\ \int_{\Gamma_{j,B}}\beta u \doteqdot L_{j,B}\beta_{j,B}u_B,\ \int_{\Gamma_{j,B}}\beta u_j \doteqdot L_{j,B}\beta_{j,B}u_j$$

$$\int_{P_j}\kappa u \doteqdot A_j\kappa_j u_j,\ \int_{P_j} f \doteqdot A_j f_j$$

として(16)を近似すると

(17) $\sum_{k} L_{j,k}\beta_{j,k}u_k + \sum_{B} L_{j,B}\beta_{j,B}(2u_B - u_j) + A_j k_j u_j = A_j f_j$

となる。境界条件 $Mu = 0$ は

(18) $\mu_{j,B}u_j - \beta_{j,B}(2u_B - u_j) = 0$

で近似する。H上で定義される discrete function の作る Hilbert space $\mathcal{H}_h$ を考える。内積とノルムは $(u,v)_h = \sum_j A_j u_j v_j$, $\|u\|_h^2 = (u,u)_h$, 境界上では $(u,v)_{Bh} = \sum_j \sum_B L_{j,B}u_{j,B}v_{j,B}$, で定義する。このとき(13)と類似の次の補助定理が成立する。

<u>補助定理</u>「K ; symmetric positive , M ; semi-admissible とし u_h を(17)(18)の解とすると

(19) $\|u_h\|_h \leq \lambda_K^{-1}\|f\|_h$ ここで λ_K は $K+K'$ の最小固有値

さらに $\mu+\mu'$ が ∂D 上で正定値ならば

(20) $\|u_h\|_{Bh} \leq (\lambda_K\lambda_\mu)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_h$

ここで λ_μ は $\mu+\mu'$ の最小固有値である。」

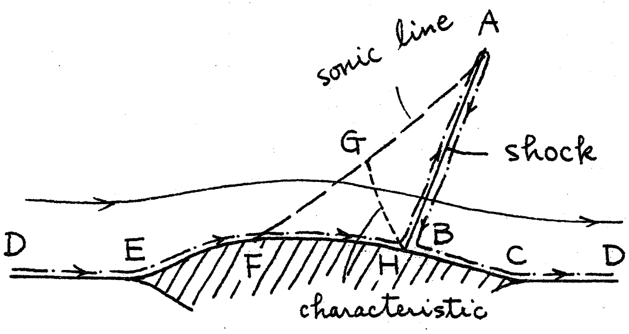
この補助定理に基づいて次の定理が得られる

定理「K ; symmetric positive , $\mu+\mu' > 0$ on ∂D とする。問題(14)(15)に対して $C^2(\bar{D})$ に属する解が存在するとし、境界 ∂D は区分的になめらかであると仮定する。(17)(18)の解を u_h とし格子点函数 u_h を各格子領域 P_j に対し階段函数として D 上に拡張して得られた函数を $P_h u_h$ とする。そのとき任意の正数 $\nu < \frac{1}{2}$ に対し次の評価が成り立つ

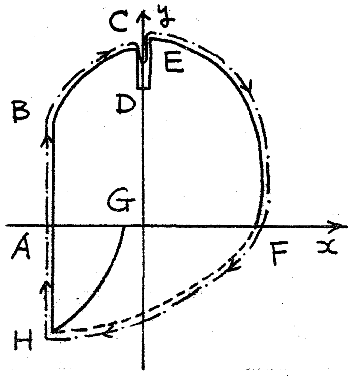
$$\|P_h u_h - u\|_{L^2} = O(h^\nu) \quad (\text{as } h \to 0)$$

」

§4. Frankl's shock problem



Physical Plane fig.4



Hodograph Plane fig.5

Frankl's shock problem とは fig.4 のように遷音速流体中に物体があってEFGとBC上で流れ函数を与え、shockに対して条件を与えて、Hodograph面上で解き、BCDEFの形の変化により流れがどのように変化するかを、又実際に妥当な流れを見つけようとする問題でFrankle[12][13]は次の形で提出した。

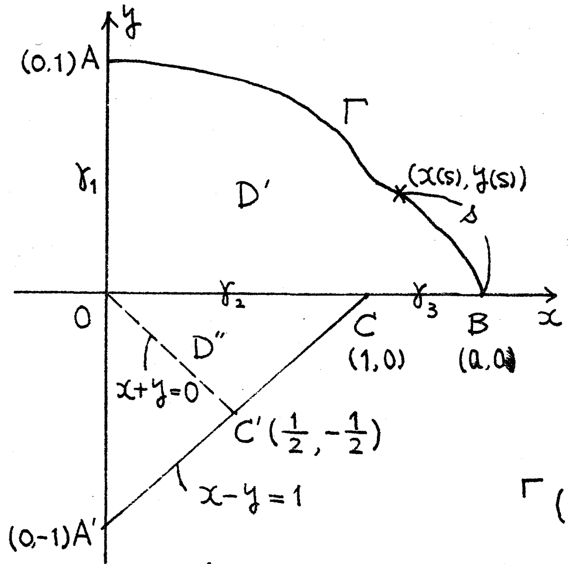


fig. 5

考える領域Dは、なめらかな曲線Γ，線分BC(=γ_3)，特性曲線CA'，線分AA'で囲まれる領域である。(fig.5)

OA = γ_1，OC = γ_2 とする

Frankle's shock problem

Γ (21) $|y|^m \operatorname{sgn} y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

((21)は $m=1$ の時 (1-1) に $m=0$ のとき (1-2) になる)

(22) $\quad u|_{\Gamma} = \psi_1(s) \qquad 0 \leq s \leq l$

(23) $\quad u|_{BC} = \psi_2(x) \qquad 1 \leq x \leq a$

(24) $\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{AA'} = 0$

(25) $\quad u(0,y) - u(0,-y) = f(y) \qquad -1 \leq y \leq 1$

ここで、$\psi_1(s)$, $\psi_2(x)$はHölder cond. をみたす与えられた函数で$\psi_1(0) = \psi_2(a)$。$f(y)$は$-1 \leq y \leq 1$でHölder cond. をみたす連続な1階導函数をもつとする。そのときP1～2で述べたと類似の(21)～(25)の解を求めること。」

先にTricomi問題に対する差分解法を見たが、それらの方法はFrankl's shock problemに適用できるであろうか？ (25)という境界条件はsemi-admissible boundary conditionの枠に入らないし、最大値原理の適用できる可能性も疑問である。しかし、$m > 0$の場合この問題に対して、Девингталь[14) 15)]はHolmgrenの結果を用いて$\nu(x) = u_y(x,0)$に関する積分方積式を解く問題に帰着させ、Tricomi問題のところで述べたのと類似の解の存在と一意性を証明している。

$m = 0$の場合に限って、Бицадзе[16) 17)]の行ったFrankl's shock problemの解の一意性の証明に従って、差分解法を試みているが、いままでのところ成功していない。

この報告は、野木達夫氏の援助の下で作成したものであり感謝の意を表わしたいと思います。

文　献

1) О.А. Ладыженская, "Об одном способе приближённого решения задачи Лаврентьева-Бицадзе" УМН 9, 4, 1954, 187–189

2) Е.А. Волков, "К численному решению задачи Лаврентьева-Бицадзе," ДАН СССР 103, 5, 1955, 755–758

3) Ф. А. Тагиев, "Решение задачи Трикоми с общим условием склеивания методом сеток и квадратуры," Вопросы Вычислительной Маmeматики 1968, 45–63

4) З. И. Халилов, "Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток," ДАН Азерб. ССР 9, 4, 1953 189–194
(この論文は入手できていないので報告者は見ていない)

5) А.Ф. Филиппов, "О разностном методе решения задачи Трикоми" Изв. А.Н. СССР Сер Матем., 21, 1, 1957, 73–88

6) H. Ogawa, "On difference methods for the solution of a Tricomi problem," Trans. Amer. Math. Soc. 100, 1961, 404–424

7) L. I. Kovalenko, "The difference method and the uniqueness of the generalized solution of the Tricomi problem," Doklady 1965, Tom 162, No.4 747–751

8) L. I. Kovalenko, "Generalized solution of the Tricomi problem," Doklady 1965, Tom 162, No.5, 789–793

9) K.O. Friedrichs, "Symmetric positive linear differential equations," Comm. Pure Appl. Math., v. 11, 3, 1958, 333–418

10) T. Katsanis, " Numerical solution of Symmetric Positive differential equations," Math. Comp., 22 (1968) 763-783

11) T. Katsanis, " Numerical solution of Tricomi equation using theory of symmetric positive differential equations," SIAM J. Numer. Anal. 6, No. 2, June 1969 236-253

12) Ф. И. Франкль, " Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, окачивающейся прямым скачком уплотнения," Прикл. матем. и мех. Том 20, 2, 1956, 196-202

13) Ф. И. Франкль, " Обтекание профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения," Прикл. матем. и мех. Том 21, 1, 1957, 141-142

14) Ю. В. Девингталь, " О существовании решения одной задачи Ф. И. Франкля," ДАН СССР, Том 119, No 1, 1958, 15-18

15) Ю. В. Девингталь, " К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля" УМН XIV, 1 (85), 1959, 177-182

16) А. В. Бицадзе, " Об одной задаче Франкля," ДАН СССР Том 109 No. 6, 1956, 1091-1094

17) А. В. Бицадзе, " О единственности решения задачи Фракля для уравнения Чаплыгина," ДАН СССР, Том 112, No 3, 1957, 375-376